Lenka LOMTATIDZE

Historický vývoj pojmu křivka

NADACE UNIVERSITAS V BRNĚ
AKADEMICKÉ NAKLADATELSTVÍ CERM V BRNĚ
ČESKÁ MATEMATICKÁ SPOLEČNOST
2007

Nadace Universitas v Brně



Text © Lenka Lomtatidze, 2006
Obálka © Pavel Kříž, 2006
Technická spolupráce © Tomáš Mořkovský - Pavel Zpupný, 2006
Vydaly © Nadace Universitas v Brně, Akademické nakladatelství CERM v Brně a Česká matematická společnost, 2006
ISBN 978-80-7204-492-4 (AKADEMICKÉ NAKLADATELSTVÍ CERM)

Obsah

Úvod **9**

1. Nejstarší kořeny **17**
1.1. Kružnice a úsečky 18
1.2. Spirály 23

2. Křivky v antické geometrii **31**
2.1. Pojetí geometrie ve starověku 38
2.2. Křivky popsané ve starověku 41
2.2.1. Křivka, přímka a kružnice u Eukleida 41
2.2.2. Hippiova kvadratrix 42
2.2.3. Kuželosečky 46
Apollóniův spis *O kuželosečkách* 50
2.2.4. Dioklova Kisoida 52
2.2.5. Nikomedova konchoida 53
2.2.6. Archimedova spirála 56
2.2.7. Spirály ionských sloupů 58
2.2.8. Prostorové křivky 59
2.2.9. Křivky v posledním období antiky 64
2.3. Přínos antiky k teorii křivek ■ 65

3. Od antiky k analytické geometrii **71**
3.1. Studium křivek po zániku Západořímské říše 72
3.1.1. Čína a Indie 72
3.1.2. Arabská geometrie 74
Překlady geometrických spisů 76
Křivky v arabské geometrii 77
3.1.3. Geometrie ve středověké Evropě 82
Latinské překlady geometrických textů 88
Gotická architektura 90

3.1.4. Shrnutí období středověku 93
3.2. Křivky v období renesance 97
3.2.1. Perspektiva 97
3.2.2. „Projektivní“ pohled na kuželosečky 100
3.2.3. Základy analytické geometrie 102
3.3. Křivky v Descartově *La Géométrie* 107
3.3.1. Přínos Descarta k teorii křivek ■ 123

4. 1649–1748 – „století křivek“ 129
4.1. Descartovi nástupci 130
4.1.1. Komentované edice Descartovy *La Géométrie* . . . 130
4.1.2. Další spisy inspirované Descartovou *La Géométrie* 133
4.2. Studium křivek na přelomu 17. a 18. století 135
4.2.1. Cassiniho ovály 138
4.3. Isaac Newton a teorie křivek 141
4.3.1. *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis* 145
4.4. Newtonovi nástupci 158
4.4.1. Maupertuis, Bragelone 158
4.4.2. Jean Paul de Gua de Malves 159
4.4.3. Colin Maclaurin 160
4.4.4. James Stirling 162
4.4.5. Alexis Clairaut 163
4.5. Počátky diferenciální geometrie křivek 163
4.6. Odkaz „století křivek“ pro další vývoj ■ 165

5. Pojem křivka a pojem funkce 171
5.1. Funkce a podněty matematické analýzy 173
5.2. Diferenciální geometrie křivek do roku 1854 176
5.2.1. Leonhard Euler 176
5.2.2. Gaspard Monge a Carl Friedrich Gauss 182
5.2.3. Následovníci Monge a Gausse 186
5.3. Rozvoj algebraické geometrie křivek 187
5.3.1. Julius Plücker 188
5.3.2. Biracionální transformace 191
5.4. Bernard Riemann a pojem *varieta* 192
5.5. Pojem křivka u Bernarda Bolzana 195
5.6. Tendence v geometrii v polovině 19. století ■ 196

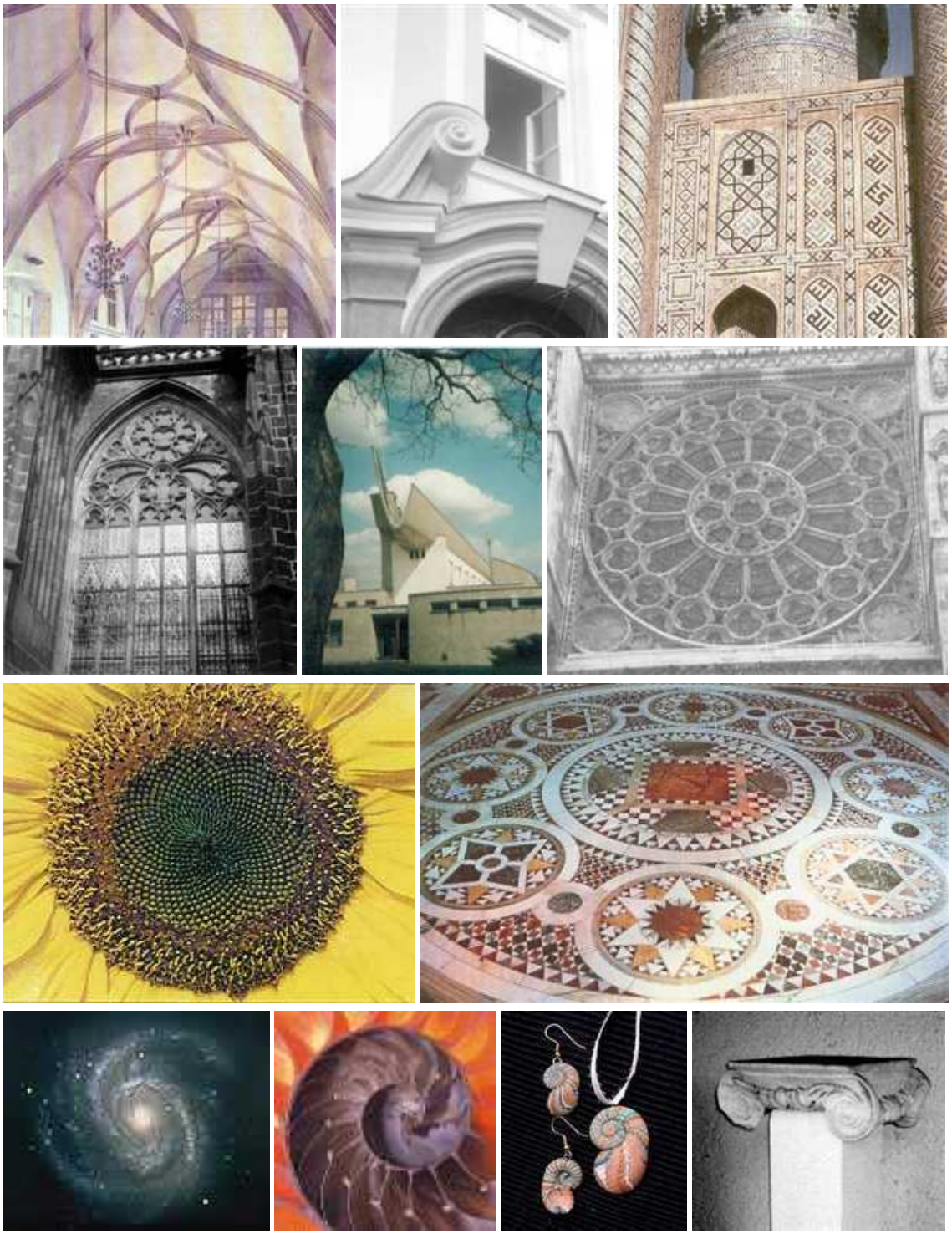
6. Vývoj pojmu křivka na konci 19. a počátku 20. století 201
6.1. Rovinná křivka 202
6.1.1. Jordanova definice křivky 202
6.1.2. Zobrazení mezi úsečkou a čtvercem 204
Konstrukce Cantora 204
Konstrukce Peana 207
6.1.3. Cantorova definice křivky 209
6.1.4. Vztah mezi Jordanovou a Cantorovou definicí rovinné křivky 210
6.2. Křivka v prostoru dimenze n 212
6.2.1. Urysohnova definice křivky 216
Historické poznámky 221
6.2.2. Křivka jako jednorozměrná podvarieta 222

Závěr ■ 225

Literatura 229

Rejstřík pojmů 233

Jmenný rejstřík 237



Úvod

Ačkoliv je pojem *křivka* na první pohled prostý a intuitivně jasný, ukázalo se, že najít uspokojivou definici křivky není vůbec snadné. Uspokojivou v tom smyslu, aby tato definice byla matematicky přesná a současně odpovídala tomu, co pod pojmem křivka intuitivně chápeme. Původní zkoumání křivky jako reálného objektu, který bylo možno nakreslit do písku, vytyčit provazem či vyrýt do kamene, se během staletí rozvinulo ve zkoumání křivky jako vysoce abstraktního objektu, ke kterému dnes specializované obory matematiky přistupují nejrůznějším způsobem (geometrická topologie, geometrické struktury na varietách, počítačová geometrie, diferenciální geometrie ve fyzice apod.).

V disertační práci je studován obsah pojmu křivka v jednotlivých obdobích historického vývoje a to od nejstarších dob starověku až k pojetí pojmu křivka v moderní matematice 20. století. Jak se během vývoje měnil obsah pojmu křivka, jak dalece se moderní definice blíží intuitivnímu chápání křivky a může vůbec dnešní matematika zodpovědět otázku *Co je to křivka?* či nikoliv, to jsou otázky, ke kterým mimo jiné v práci směřujeme. Jedním z hlavních cílů práce je ukázat na pozadí historického vývoje hluboký obsah tohoto pojmu, přirozenost a potřebnost jeho definice. Za tím účelem zejména hledáme podněty, které ke studiu křivek vedly, srovnáváme metody studia křivek a pojetí pojmu křivka v jednotlivých historických obdobích, sledujeme vztah tohoto pojmu k jiným matematickým pojmům (funkce, množina apod.). Jelikož vývoj tohoto pojmu zdaleka nesouvisí jen s historickým vývojem matematiky, ale je úzce spjat s rozvojem dalších vědních oborů, je v práci v neposlední řadě vše zasazeno i do širších souvislostí. Je zřejmé, že vlastnímu formování definice pojmu předcházelo dlouhé období, kdy byly studovány jednotlivé křivky a jejich vlastnosti. Z tohoto období vycházejí kořeny pozdějšího pojetí pojmu křivka v moderní matematice a nelze je při studiu opominout. Při popisu historického vývoje stále sledujeme hlavní nit vedoucí k definici křivky. Není naším cílem zabývat se jednotlivými vlastnostmi křivek či podávat jejich encyklopedický přehled. Na některých

místech se zastavujeme, abychom rozebrali konkrétní příklady křivek, ale v tom případě nám jde o doložení užívaných metod studia křivek, charakteristických rysů geometrie té doby apod. U vybraných matematiků se věnujeme jen jejich přínosu k teorii křivek. Z uvedených důvodů u nich nezmiňujeme jiné významné práce nebo procházíme rychlejším tempem období, které by si z hlediska vývoje matematiky jako celku zasloužilo větší pozornost, a naopak se zastavujeme tam, kde lze najít ke studovanému tématu pozoruhodné detaily. Předpokládáme, že čtenář má jisté znalosti o vývoji matematiky, případně uvádíme literaturu k tomuto tématu. Abychom usnadnili čtenáři časové zařazení popisovaných skutečností do širšího kontextu, uvádíme pro časově vzdálenější období orientační přehledy historického vývoje.

Práce je rozdělena do šesti kapitol. Struktura kapitol je formována tak, že po krátkém vstupu do studované doby se stručnou orientací v obsahu kapitoly přecházíme ihned k problematice křivek. Následuje podrobný výklad doložený citacemi, odkazy, komentáři jiných autorů a vlastními myšlenkami. V závěru vždy uvažujeme nad vytyčeným obdobím, hodnotíme a srovnáváme s obdobím předcházejícím. Seznam literatury je uveden za každou kapitolou.

Je možné také přečíst nejdříve všechny závěrečné úvahové odstavce jednotlivých kapitol (označené v obsahu ■) a teprve potom podrobné podklady k těmto úvahám. Pro základní orientaci ve vývoji křivky uvádíme stručné teze disertační práce:

Kapitola 1

První kapitola je věnována nejstarším kořenům historického vývoje křivek. Počátek historie křivek není pochopitelně možné přesně určit. Archeologické nálezy z celého světa dokazují, že historické kořeny zájmu člověka o křivky sahají hluboko do minulosti. Tento zájem byl úzce spjat s každodenní činností člověka – s činností praktickou, kdy byly první křivky sledovány jako dráhy pohybujících se těles či používány např. k vytyčování obřadních míst, půdorysů pro obytná přístřeší, při dělení pozemků, a s počátky estetického cítění se křivky objevovaly jako součást ornamentů zdobících užitkové předměty. Řešení problémů z praxe vedlo ke shromažďování prvních geometrických poznatků, ve kterých se mimo jiné objevují základní vlastnosti nejjednodušších křivek – kružnice a „přímky“ (tehdy chápané spíše jako omezená část přímky). Tyto první geometrické znalosti o kružnici a „přímce“ spadají do doby hluboko před naším letopočtem, stejně jako užití spirálovitých a dalších křivek pro výzdobu užitkových předmětů apod.

Kapitola 2

Přibližně v 6. století před Kr. se ve starověkém Řecku objevuje snaha podat přírodovědný výklad světa. Kromě jiného se dostává do popředí zájmu geometrie jako vhodný nástroj k popisu světa a jevů v něm. Starořečtí učenci se však zabývají geometrickými problémy i pro ně samotné, nikoliv jen proto, aby řešili nějakou praktickou úlohu. Tím položili základ vědeckému bádání. Ve starověkém Řecku najdeme kořeny mnoha vědních oborů a lze říci, že právě v geometrii došli Řekové nejdále. V Euklidových *Základech* (3. století před Kr.) je geometrie vykládána jako axiomaticky budovaný systém. Tento výrazný kvalitativní zlom s sebou přináší i zcela nový přístup ke křivkám. Kružnice a přímka, geometrické objekty z nich vytvořené, jejich vlastnosti a vzájemné vztahy byly předmětem zájmu snad všech starověkých geometrů. Mnohé jejich výsledky byly shrnuty v již jmenovaném spise *Základy*. Zkoumání těchto dvou nejjednodušších a nejdůležitějších křivek s sebou přineslo první hluboký problém, tzv. *rektifikaci kružnice*. Mnoho starověkých učenců se bez úspěchu zabývalo převedením dané kružnice (resp. její části) na úsečku stejné délky jako je obvod dané kružnice (resp. její části) tzv. eukleidovskou konstrukcí. Problém rektifikace kružnice úzce souvisí s tzv. kvadraturou kruhu – převedením daného kruhu na čtverec o stejném obsahu. Kvadratura kruhu a další dvě úlohy, které se také nedařilo vyřešit požadovanou metodou – zdvojení krychle a trisekce úhlu, bývají často společně nazývány *tři proslulé problémy starověku*. Skutečná hloubka problému byla pochopena o více než dva tisíce let později v moderní evropské matematice. Teprve v 19. století bylo dokázáno, že tyto problémy jsou eukleidovsky neřešitelné. Po celou dobu vedla snaha řešit tyto úlohy k objevení mnoha důležitých matematických poznatků.

Snaha řešit některou z proslulých úloh vedla už během starověku k objevení kuželoseček a několika speciálních křivek (Dioklova kisoida, Nikomedova konchoida a další). K popisu nových křivek byl většinou užíván pohyb, nebylo možno je konstruovat euklidovsky. Filozofický problém pohybu byl patrně jedním z hlavních aspektů, které bránily dalšímu studiu těchto křivek. Až na Apolloniův spis *Kuželosečky*, ve kterém jsou ovšem elipsa, hyperbola a parabola zaváděny nikoliv pohybem ale jako řezy na kuželi, nebyla vytvořena žádná ucelenější teorie křivek. Jistý pokus o definici křivky lze najít v Euklidových *Základech*.

Studiem křivek ve starověku – prvním vědeckým studiem křivek v historii se zabývá kapitola druhá.

Kapitola 3

Po rozpadu antického světa nastává na území Evropy útlum zájmu o křivky spojený s celkovým útlumem zájmu o geometrii a vědu vůbec. Antické znalosti jsou uchopeny zejména rozvíjejícím se arabským světem. Na konci středověku se v Evropě objevují některé křivky jako součást náročných gotických staveb – rozetová okna, klenby apod. Studie staveb dokazují, že se konstrukce těchto architektonických prvků se neobešly bez jistých geometrických znalostí. Zásadní zlom ale přichází až v období renesance, které s sebou mimo jiné přináší také zájem o odkaz antiky. Spolu s jinými řeckými spisy se začínají studovat i práce o křivkách, které se dochovaly především díky arabskému světu. Překvapující je intuitivní a současně velmi přesné užití některých metod u malířů italské renesance. Prvním spisem, který odkaz antiky výrazně překonal, byla *Geometrie* francouzského filozofa René Descarta, vydaná jako součást jeho filozofického díla *Rozprava o metodě* (1637). V souvislosti s rozvojem mechaniky bylo v sedmnáctém století aristotelovské pojetí pohybu již plně nahrazeno představou pohybujícího se objektu, který prochází po své dráze bod po bodu (dnes bychom řekli spojitě a ve spojitém čase). Descartes proto bez rozpaků popisuje rovinnou křivku jako množinu průsečíků dvou pohybujících se přímek. Pohyby těchto přímek blíže specifikuje, čímž vymezil ty křivky, které my dnes nazýváme (rovinné) algebraické, tj. množiny bodů $X = [x, y]$, jejichž souřadnice vyhovují rovnici $F(x, y) = 0$, kde $F(x, y)$ je polynom dvou proměnných. Descartes také tyto křivky popisuje algebraickými rovnicemi, ale po prostudování jeho *Geometrie* je patrné, že nepovažoval ještě rovnici za dostatečnou reprezentaci křivky. K zavádění křivek většinou používá mechanická zařízení, která tyto křivky vykreslují (popřípadě uvádí metodu konstrukce jednotlivých bodů apod.). Popisuje algebraicky pohybující se průsečík vzhledem k nějakému pevnému bodu na pevně zvolené přímce. Ukázal tak v *Geometrii* mimo jiné jak aplikovat algebru na geometrii, čímž vytvořil silný nástroj ke studiu křivek – zárodek toho, co dnes nazýváme analytická geometrie. Pojetí křivek u Descarta tvoří těžiště kapitoly třetí.

Kapitola 4

Následující období, silně ovlivněné Descartovými myšlenkami, je charakteristické přímo expanzivním studiem vlastností speciálních křivek. Na tomto studiu se formovaly myšlenky vedoucí k infinitezimálnímu počtu, variačnímu počtu i dalším oborům. S přibývajícím množstvím známých

křivek se objevuje snaha tyto objekty klasifikovat (pokusil se o to už Descartes, ale jeho klasifikace byla chybná) a najít společné vlastnosti větších skupin křivek. Postupně byly Descartovy myšlenky rozpracovány až k dnešnímu souřadnému systému a metody analytické geometrie se užívají k vyšetřování dalších vlastností křivek. Právě na tomto studiu speciálních křivek se na konci 17. a celé 18. století formují myšlenky rodícího se infinitezimálního počtu. Poznatky té doby jsou spjaty se jmény Pascal, Huygens, Newton, Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli a další. Z nich nepochybně vzhledem k našemu tématu vyniká Newton se svým spisem *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis* (1704), ve kterém Newton jako první uchopil Descartovu metodu v plné šíři a vytvořil s její pomocí novou ucelenou teorii – teorii kubických křivek. Jeho následníci (i někteří současníci) se postupně začali dívat na rovinné křivky jako na souhrny bodů vyhovujících rovnici

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

kde $F(x, y)$ je výraz udávající vztah dvou proměnných, nikoliv nutně polynom. Dnes bychom řekli funkce dvou proměnných vyjádřená kombinací konečného počtu elementárních funkcí. Ačkoliv bylo toto pojetí křivek na tehdejší dobu velice obecné, byly už tehdy známy křivky, které buď nebylo možno vůbec rovnicí (1) vyjádřit a nebo toto vyjádření nemělo žádný smysl pro vyšetřování dané křivky (např. Archimédova spirála). Objevuje se také reprezentace křivky (jako grafu jisté funkce) mocninnou řadou, vytvářejí se první pojmy diferenciální geometrie. Podrobně je toto „století křivek“ (1649–1748) studováno ve čtvrté kapitole.

Kapitola 5

Pojetí pojmu křivka se v té době vyvíjí v úzké souvislosti se zaváděním pojmu funkce. Parametrická vyjádření již známých křivek vedly k dalšímu zobecnění pojmu křivka. Souřadnice bodů $X = [x, y]$ rovinné křivky byly dány jako funkce proměnné veličiny, tj. např. $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in I$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval, a přitom se na funkce $\varphi,\ \psi$ kladly podmínky, které se stávaly tím obecnější, čím obecnější byl pojem funkce. Parametr t bylo možno chápat jako čas, ale také značil např. úhel nebo délku oblouku. Ukazujeme některé souvislosti mezi pojmem křivka a pojmem funkce. Současně s vývojem pojmu funkce přináší v 18. století nové metody do studia křivek diferenciální geometrie, která vznikla jako aplikace metod matematické analýzy na geometrii, tj. diferenciální geometrie umožňuje studovat limitní procesy. Vrcholem jejího prehistorického období jsou práce L. Eulera. Pracemi G. Monge a C. F. Gausse

se pak diferenciální geometrie stává samostatným odvětvím matematiky. V kapitole páté se zaměřujeme na jejich přínos ke studiu křivek. Současně v souvislosti s pokrokem algebraických metod v projektivní geometrii se v první polovině 19. století vydělila z analytické geometrie jako samostatný celek teorie algebraických křivek vyššího stupně. Tento jev je historiky matematiky většinou považován za vznik algebraické geometrie jako samostatné vědní disciplíny. I tomuto směru se věnujeme v kapitole páté. Uzavíráme ji zmínkou a Bolzanově pohledu na křivky a pojednáním o specifickém přínosu B. Riemanna, který svou definicí křivky jako variety předběhl dobu o několik desetiletí.

Kapitola 6

Kapitola šestá má odlišný charakter. Rozvoj geometrie v 19. století již nedovoluje sledovat vývoj teorie křivek v celé jeho šíři, proto se dále úzce specializujeme na definici pojmu křivka. Nejpřesněji tuto definici zformuloval ve druhé polovině 19. století francouzský matematik C. Jordan:

> Křivka (rovinná) je množina bodů v rovině, jejichž souřadnice jsou spojitými funkcemi
>
> $$x = \varphi(t),\ y = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq 1. \tag{2}$$

Ovšem brzy se ukázalo, že Jordanova definice křivky je příliš obecná. V roce 1890 ukázal italský matematik G. Peano, že můžeme zvolit funkce $\varphi,\ \psi$ definované na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a spojité na tomto intervalu tak, že množina bodů $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ vyplňuje plochu čtverce včetně jeho hranice.

Souběžně proniká na konci 19. století do matematiky stále hlouběji tzv. množinové pojetí, postupně vzniká nový obor matematiky – teorie množin. Tento přístup je úzce spjat se jménem G. Cantora. V jeho pracích se mimo jiné objevuje také definice křivky na základě pojmů teorie množin:

> Kontinuum C (množina, která je současně souvislá a kompaktní) se nazývá rovinnou křivkou, jestliže neobsahuje žádný vnitřní bod.

Tento přístup byl završen v pracích ruského matematika P. S. Urysohna, který podal ve dvacátých letech 20. století nejobecnější definici křivky. Urysohn zavádí rozměr kontinua a definuje křivku jako kontinuum dimenze jedna. Dá se ukázat, že každá rovinná křivka Cantorova je také křivkou ve smyslu Urysohnově a naopak každá rovinná křivka ve smyslu

Urysohnově je také Cantorovou křivkou. Toto pojetí křivek je založeno na elementárním poznatku, totiž, že kružnice dělí rovinu na dvě oblasti. Takovou vlastnost má nejen kružnice, ale i každá křivka s ní homeomorfní. Jakkoliv je toto tvrzení intuitivně zřejmé, dokazuje se velmi složitě. Je evidentní, že definice křivky ve smyslu Urysohnově je nevhodná pro studium lokálních vlastností křivky. Studiem lokálních vlastností křivky se zabývá diferenciální geometrie. Pojetí křivek v diferenciální geometrii je odlišné od množinového přístupu Cantora a Urysohna. Diferenciální geometrie křivek studuje vlastnosti křivek nezávislé na poloze křivky v prostoru pomocí tzv. lokálních parametrizací. Stěžejní úlohu zde hraje diferenciální počet. V moderní diferenciální geometrii dvacátého století je pojem křivky zobecněn v souvislosti se zavedením pojmu varieta.

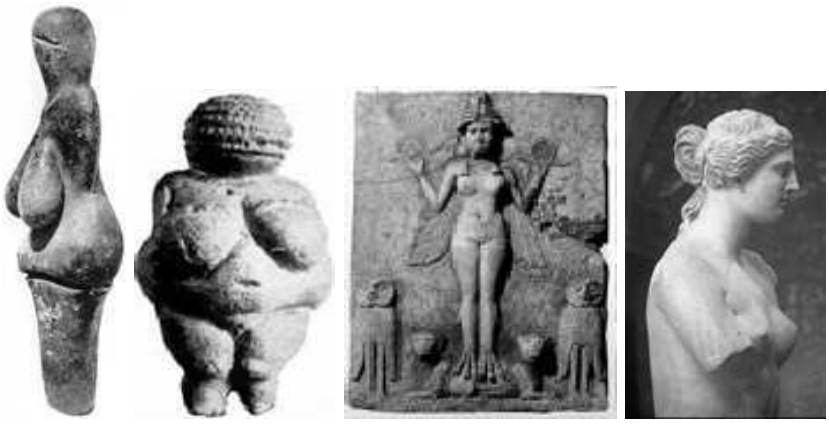
V šesté kapitole jsou naznačeny přístupy různých oborů k pojmu křivka, avšak jsou vynechána ta odvětví matematiky, která pojem křivka neužívají v souladu s našim intuitivním chápáním tohoto pojmu.

Kapitola 1

Nejstarší kořeny

> *Nacházíme se v úžasném světě. Hledáme smysl věcí, jež nás obklopují, a ptáme se: Co je podstatou vesmíru? Jaké místo nám v něm přísluší? Proč je vesmír takový, jaký je? Kdo jsme?* Hawking [Haw91, str. 163]

Pochopitelně není snadné jednoznačně určit, kdy se vlastně lidé začali křivkami zabývat, tak jako je relativní říct, kde začíná geometrie. Ohlédneme–li se pět tisíc let zpět, nebudeme jistě přehánět (viz [Scr00]).



Obrázek 1.1: (a) Věstonická Venuše, 29 000–25 000 př. Kr., (b) Venuše z Willendorfu, 24 000-22 000 př. Kr., (c) Lilith, Babylón, cca 2000 př. Kr., (d) Afrodité, Řecko, cca 150-100 př. Kr.

Při pohledu na obrázek 1.1 můžeme konstatovat, že křivky té něžnější poloviny lidstva byly pravděpodobně od nepaměti zdrojem inspirace. Ale i pokud pomineme toto estetické hledisko a přiblížíme se více k matematice, troufáme si říci, že intuitivní zájem člověka o křivky jako „objekty“ je tak starý jako lidstvo samo. Nálezy z celého světa dokazují, že byly vytyčovány jako půdorysy staveb či obřadních míst, užívány ke zdobení užitkových předmětů, považovány za mystické symboly apod.

V širším smyslu patří do geometrie všechno, co dokumentuje pochopení tvaru a jeho využití. V každé malbě je přítomný určitý prvek geoemtrické abstrakce, i když to není původním záměrem tvůrce. V tomto smyslu je určitý stupeň geometrického myšlení příznačný už pro střední paleolit, ale jdeme-li po časové ose před začátek našeho letopočtu, začíná být veškeré studium obtížné nejen v historii matematiky. Jdeme-li dále než 2000 let před Kr., začíná to být téměř nemožné. Proto bude tato kapitola spíše útržkovitým výkladem několika desítek nálezů a skutečností, které alespoň nastiňují jakým způsobem naši dávní předkové uchopili a používali některé křivky, než souvislým studiem, ale k některým skutečnostem, se budeme v pozdějších kapitolách v různých souvislostech vracet. Nejvíce se soustředíme na Egypt, z něhož později vyrostly geometrické znalosti Starověkého Řecka, jimiž se zabýváme v kapitole druhé.

1.1. Kružnice a úsečky

> *Tento – zdánlivý – protiklad Slunce a Měsíc je rovněž zdrojem poznání, že vedle logického kauzálního myšlení, které může symbolizovat racionálně pochopitelná dvanáctka, může existovat universum, jež se pouze a jen spoléhá na vzájemné „vyhovění si“, tedy na ekvivalenty. Tento logos tak říkajíc tone v prostoru, svobodný a podobný vzdáleným hvězdným světům, anebo podobný lidskému bytí, jeho nevědomí, lidské duši.*
>
> Berling [Ber04, str. 14]

Slunce a Měsíc v úplňku, dvě nebeská tělesa, která od nepaměti fascinují člověka, jsou přirozeným obrazem kružnice. Spolu se svým cyklickým oběhem byly bezesporu hlavním podnětem pro vytyčování obřadních míst ve tvaru kruhu.

Po celé západní Evropě se nacházejí pozoruhodné megalitické památky – monumenty zahrnující velké hrobky, kamenné kruhy (či kruž-



(a) Stonehenge, 3200–1800 př. Kr.



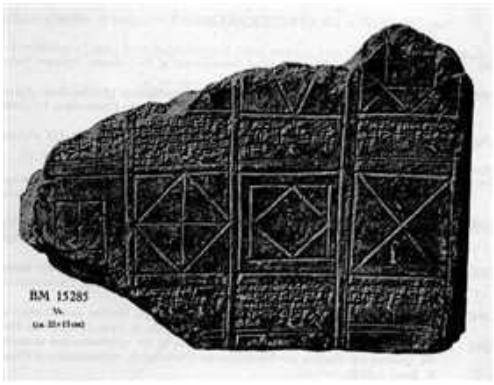
(b) Hrobka v Newgrange, 4000 př. Kr.

Obrázek 1.2: Nejstarší megalitické památky v Evropě

nice) a menhiry.[1] Mnohé z těchto památek jsou starší než pyramidy v Egyptě. Většina z nich poukazuje na pozici Slunce a Měsíce ve vztahu k nějaké významné roční době (hlavně letnímu a zimnímu slunovratu). Snad nejznámější je kamenná kružnice Stonehenge na salisburské planině v Anglii, která sloužila jako sluneční a měsíční kalendář (viz obr. 1.2). Z těch méně známých jmenujme např. Castlerigg v severozápadní Anglii, kde je obvod kruhu vyskládaný z 60 otesaných kamenů. Byl zbudovaný obdobně jako Stonehenge v letech 3200–1800 př. Kr. Donedávna se pokládala existence solárně-lunárního kalendáře za jistotu teprve od roku 2100 př. Kr. Objev královského archivu v Sýrii ale ukázal, že dělení roku do dvanácti lunárních měsíců muselo být zahájeno už uprostřed třetího tisíciletí.[2]

[1] Samostatně stojící obrovské kameny.

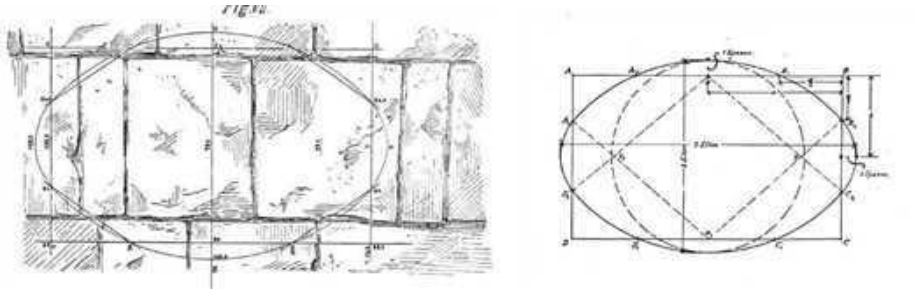
[2] Čtyři lunární fáze (od novoluní přes ubývající srpek sedmého dne, úplněk 14. dne, ubývající měsíc 21. dne až k jeho „zmizení“ 28. dne) byly dokonce už velmi přesně známy. Dny chybějící do slunečního roku byly pokaždé nastaveny, někdy na začátku, někdy na konci roku, pokud možno tak, že to lunárnímu cyklu nezpůsobilo žádnou škodu. Viz [Ber04, str. 25].



Obrázek 1.3: Tabulka z období starobabylónského, [Beč03, str. 364]

Dějiny Mezopotámie, jedné z nejstarších známých vyspělých civilizací, jsou složité (orientační přehled viz tabulka 1.1 na str. 27). Pro naše potřeby postačí připomenout, že nálezy ze sumerských, babylónských a asyrských měst poukazují na mnohé geometrické znalosti. Na obrázku 1.3 je hliněná tabulka, na které se dochovaly obrázky čtverců a kružnice. Na tabulce jsou zachycena zadání 15 příkladů, k jejichž řešení je třeba znalosti Pythagorovy věty, algoritmů pro výpočet obsahů rovinných geometrických útvarů a řešení kvadratických rovnic. Egyptská civilizace patří snad k nejvíce zkoumaným starověkým civilizacím, přesto je řada věcí kolem její minulosti nejasná. Podle Proklových komentářů k první knize Eukleidových *Základů* (viz odst. 2.2.9) objevili geometrii Egypťané, protože byli nuceni rozměřovat půdu v údolí Nilu, kde byly každoročně záplavami zničeny hranice pozemků. Vědci i amatérští badatelé ze všech koutů světa jsou ale přitahováni zejména Egyptskými pyramidami a geometrickými i astrologickými zákonitostmi „zakódovanými“ v nich. Motivace pro tyto stavby zůstává záhadou. V literatuře se těžko oddělují fakta od hypotéz. Jen stěží můžeme nahlédnout do myšlení a schopností tehdejších lidí a budeme je vždy soudit jen z našeho pohledu. S jistotou můžeme říci, že byli velmi schopnými staviteli a používali v architektuře pokročilé matematické výpočty. Poslední nálezy posouvají datování stále dále do minulosti. Hrubé hyeroglyfy se zde objevily přibližně ve stejnou dobu jako mezopotámské klínové písmo.[3]

[3]Německý archeolog Günter Dreyer našel v Abydu v roce 1988 tabulky vyrobené z kosti a slonoviny s hrubými hyeroglyfy – nejrannějšími formami písma na světě. Chrámy v nejstarším sumerském městě, Nippuru, představují zvláštní analogii s pyramidami (zřízeny cca 2110–2095 př. Kr.). Viz [Gal05, str. 42].



(a) Kresba oválu publikovaná Borchardtem (b) Jeho první geometrické řešení

Obrázek 1.4: Ovál na stěně chrámu v Luxoru, cca 1200 př. Kr.

V Egyptě se dochovala svědectví o vytyčování chrámů a pyramid. Vytyčování půdorysů bylo náboženským obřadem. Textová svědectví o tom nalézáme na stěnách chrámů v Karnaku, Dendeře, Edfu i na dalších místech.[4] Pro chystanou stavbu se nejprve vytyčila vodorovná rovina pomocí systému kanálů, které byly naplněny vodou.

Celé stanoviště bylo potom vyčištěno a většinou celé vydlážděno. Na takovéto vodorovné ploše byl narýsován půdorys stavby a teprve potom se začalo stavět. O těchto postupech svědčí např. výzkumy na ostrově Filé, kde se půdorysy chrámů dochovaly vyryté do kamenné dlažby; celé stavby však byly později rozebrány na materiál. [Bečo3, str. 125]

Kromě půdorysů staveb byly v Egyptě rýsovány některé detaily staveb i v nárysech a bokorysech. V Isidině chrámu na ostrově Filé se dochoval nárys sloupu i s půdorysem ve skutečné velikosti, na chrámové stěně v Luxoru se dochovala konstrukce oválu s hlavní osou delší než 1m, která pochází patrně z doby cca 1200 př. Kr. – viz obr. 1.4.[5] Zvyk rýsovat části kružeb na podlahách a stěnách chrámů ve skutečné velikosti se objevuje i při stavbě gotických katedrál – viz odstavec 3.1.3.

Bohatá Egyptská mystika používá opět symbol kruhu. Faraón Amenophis IV. dokonce na krátkou dobou (kolem roku 1370 př. Kr.) zavádí poprvé v historii víru v jediného boha – Atona, boha Slunce, a kruh je jeho symbolem. Symbol kruhu jako opakujícího se cyklu se vtiskl také do zvířetníku (zodiaku) – zvěrokruhu, který slouží astrologii. Jeden

[4] Nejzachovalejší text je v Dendeře na stěnách chrámu bohyně Hathor. Obraz připojený k tomuto textu má rozměry $1,5 \times 3$m – viz např. [Bečo3, str. 125–126].

[5] V roce 1896 slavný německý egyptolog Ludwig Borchardt (1863–1938) publikoval objev kresby oválu na stěně chrámu v Luxoru v *Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde* (Berlin/Leipzig), 34, 1896, str. 75–76.



(a) Náhrobní deska z Mykén, Řecko, cca 1600 př. Kr.



(b) Brána stúpy v Sánčí, Indie, 1. stol. po Kr.

Obrázek 1.5: Spirálovité křivky

z nejstarších zvěrokruhů zachovaný v Hathořině chrámu v Egyptě je na obrázku 1.6.

Nejpropracovanější ukázky rituálního původu a použití matematických pojmů vidíme v rozvoji geometrie s jejím důrazem na symetrii a vzory. [Bar00, str. 78]

Ukázky použití kružnic, oblouků, úseček a ojediněle i jiných křivek najdeme v symetrických vzorech po celém světě snad ve všech dobách. Ve starověku patří mezi nejzajímavější ty, které lze nalézt v souboru hinduistických příruček zvaných *Šulvasútra (Pravidla provazce)*. Obsahují podrobná geometrická pravidla jak šňůrami vyměřovat oltáře a návody jak je stavět. Ačkoliv byly sepsány někdy v 7.–5. století před Kr.,[6] jsou založeny na mnohem starších postupech. Záznamy o podobných geometrických konstrukcích se nacházejí v indických písemnostech z doby 1000 př. Kr. a dokládají spolu s knihami *Šulvasútra*, že autoři měli pokročilé znalosti geometrie k tomu, aby rituálním požadavkům vyhověli. Určitě jim byla známa Pythagorova věta, postupy pro konstrukci pravého úhlu a čtverce i postup sestrojení čtverce o stejném obsahu jako má daný

[6] Uvádíme datování podle Juškeviče [Juš77, str. 156], Barrow datuje sepsání *Šulvasútra (Pravidel provazce)* do doby 500–200 př. Kr.[Bar00, str. 79].

obdélník. Stejné konstrukce nalézáme v Eukleidových *Základech* o 200 let později.[7] Kromě *Šulvasútry* existuje ještě další pozoruhodný soubor geometrických myšlenek otištěných do rituálních diagramů, tzv. *jantar* a *mandal* viz obr. 3.2 na str. 73. Tyto geometrické obrazce jsou používané v tibetu a indické tantrické náboženské tradici k meditaci a rozjímání. Každá je symbolickým miniaturním vesmírem. Dnes známé nejstarší dochované obrazce pochází ze 17. století, ale jsou poměrně komplikované, což poukazuje na to, že se určitě dlouho vyvíjeli. Původně byly kresleny na podlahu nebo zem barevnými pastami či práškem. Poněkud trvalejší kopie se dělaly na látky, papír, kov. Není jasné, zda byla indická matematika tak vyspělá, aby dokázala konstruovat tyto tvary systematicky nebo se uplatňovala vysoce rozvinutá geometrická představivost. Někde jsou ke konstrukci trojstranných útvarů se zaoblenými stranami využity oblouky z oválů. Tyto obrazce upoutaly dnešní matematiky z toho důvodu, že připomínají trojúhelníky v neeukleidovských geometriích. Dokonce se ukázalo, že některé z kreseb byly zkonstruovány na zakřivené ploše.[8] Stejně jako tibetské kláštery byly i veliké buddhistické relikviáře, tzv. *stúpy*, budovány podle vzorce vesmírné mandaly, tj. podlaha dómu má komory soustředěné v kruzích kolem symbolické „světové osy“.

1.2. Spirály

V Egypských malbách a výzdobě najdeme kromě kružnic i křivky spirálovitého tvaru. Symbolika spirál na rozdíl od kruhů (vyznačovaných kružnicemi) není tak jasná. Zdá se, že měly představovat pohyb či víření. Nabízí se podobnost se znázorňováním čaker (energetických míst) ve východních naukách. Na budhistických památkách jsou tyto objekty také velmi časté (viz obr. 1.5(b)). Objevují se i v Řecku, kde je vliv Egypta jasně prokázán (viz obr. 1.5(a) a 1.6(c)). Některé symboly měly i hlubší význam. Např. známé Horovo oko, které slouží jako ochrana proti zlu, je složeno ze symbolů představujících zlomky

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64},$$

které dávají v součtu $\frac{63}{64}$ (viz obr. 1.6). Podle mýtu části rozbitého Horova oka složil bůh Thoth a do celku (jedničky) chybějící $\frac{1}{64}$ mu dává magickou moc.

[7] Viz [Bar00, str. 79].
[8] Viz [Bar00, str. 83].



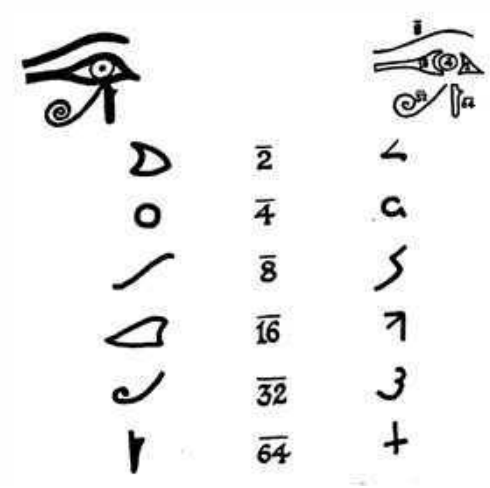
(a) Zvěrokruh z Hathořina chrámu v Dendeře



(b) Horovo oko



(c) Sfinga na spirálovitě zakončeném sloupu nalezená v Delfách, Řecko, ukazuje Egyptský vliv, 575 před Kr.



(d) Zlomky Horova oka [Gra94, str. 34]

Obrázek 1.6: Egypt

Mnoho spirálovitých tvarů všech velikostí nesou mayské stely a kamenné modly.

Mezi nejstarší kamenné stavby patří komorové hroby v Bretani v severozápadní Francii, které byly postaveny před rokem 4000 př. Kr., a kamenné hrobky v Británii a Dánsku postavené před rokem 3000 př. Kr. Obrovský kámen ležící před jedním z těchto hrobů v irském Newgrange zdobí vytesané spirály (viz obr. 1.2). Kámen je dlouhý skoro 3,5m a vysoký 1,4m. Dovnitř se dostanou sluneční paprsky horním otvorem pouze v období kolem zimního slunovratu.

Eqypt		Evropa		Amerika	
24 000	nejstarší nástěnné malby v Africe	33 000	většina území pod ledovcem	35 000	první lidé přišli z Asie
		30 000	jeskynní malby ve Španělsku a Francii	13 000	nejstarší známé naleziště na Yukonu
7500	výroba první keramiky na Sahaře	8300	ústup ledovců	8000	v Mexiku začíná kultivace rostlin
3100	sjednocení Horního a Dolního Egypta	3600	vznikají megalitické pohřební komory v Anglii	3372	začátek mayského kalendáře
2590	Velká Cheopsova pyramida	3200	počátek stavby Stonehenge, Anglie	2500	v Peru osady o počtu až 4000 obyvatel; výroba keramiky, šperků, tkanin
1550	začátek Nové říše	1800	dokončeno Stonehenge		
1379	Amenophis uctívá Atona, boha Slunce	1650	v Řecku se rozvíjí mykénská kultura	1500	v Mexiku se stavějí kamenné chrámy
1362	Tutanchaton se vzdává uctívání Atona, přejmenuje se na Tutanchamóna	1450	výbuch sopky na Théře (Santorini)		
1270	Izraelité opouštějí Egypt			1200	v Peru se objevuje civilizace Chavin
1163	Ramess III., poslední velký faraon Egypta umírá	1100	v Řecku začíná doba temna	1000	adenská kultura v lesích Severní Ameriky
332	Alexandr Veliký dobyl Egypt	450	Athény jsou na vrcholu své moci	300	první mayská města ve střední Americe
30	Kleopatra VII. spáchala sebevraždu				
				300 po Kr.	vzkvétá Guatemala, Honduraz a mayská civilizace v Mexiku

	Blízký a Střední východ		**Indie a Dálný východ**
		16 000	v Japonsku se vyrábí první keramika
7000	výroba první keramiky na Blízkém východě	9000	v Číně se užívá keramika
5500	nejstarší zavlažovací systém v Mezopotámii	4000	do Číny se dováží Nefrit ze vzdálenosti 3000km
3100	Sumerové vynalezli písmo	3500	v Thajsku se používá měď
2112	Sumerský král dal postavit slavný zikkurat Uru	2500	rozvoj měst v údolí Indu (Móhenžó-daro)
2100	Abrahám se svou rodinou opouští Ur		
1600	Féničané používají první abecední písmo	1500	počátek invaze Árijců do údolí Indu
1116	Asyřané dobyli Babylón	1300	Dynastie Šang – systém písma, kalendář
922	po smrti Šalamouna Izrael rozdělen na Izrael a Judsko		
525	Persie dobývá Egypt	566	narodil se Buddha
334	Alexandr Veliký začíná dobývat Persii	327	tažení Alexandra Velikého do Indie
		218	vrcholí práce na dokončení Velké čínské zdi
5	narození Ježíše	100	buddhismus se šíří z Indie podél obchodních cest
33 po Kr.	ukřižování Ježíše		
70 po Kr.	Římané zničili Jeruzalém	105 po Kr.	v Číně vynalezen papír
330 po Kr.	Konstantinopol se stala hlavním městem římské říše	400 po Kr.	podél hedvábné stezky se budují budhistické chrámy

Tabulka 1.1: Orientační přehled vývoje starověkého světa podle [Oli93], [Mar98]

Literatura

[Bar00] Barrow, J. D. *Pí na nebesích.* Mladá fronta, Praha, 2000. (z angl. originálu Pi in the Sky, Oxford University Press, 1992, přeložili Stehlíková N.-Vrba A.).

[Bečˇ03] Bečvář, J.–Bečvářová, M.–Vymazalová, H. *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*, svazek 23 v *Dějiny matematiky.* Prometheus, Praha, 2003.

[Ber04] Berling, P. *Dějiny astrologie.* Slovart, Bratislava, 2004.

[Gal05] Galvin, J. Abydos. Život a smrt na úsvitu egyptské civilizace. *National Geographic*, 4, 36–51, 2005.

[Gra94] Grattan–Guinness, I., ed. *Companion Encyklopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences.* Routledge, London, 1994.

[Hra98] Hradečný, P.–Dostálová, R. *Dějiny Řecka.* Lidové noviny, 1998.

[Juš77] Juškevič, A. P. *Dějiny matematiky ve středověku*, svazek I. Academia, Moskva, 1977.

[Mar98] Martellová, H. M. *Svět ve starověku.* Košice, 1998. (z angl. originálu The Ancient World, Kingfischer, 1995, přeložila Darmovzalová, K.).

[Oli93] Oliphantová, M. *Po stopách významných civilizací starověku.* Gemini, Bratislava, 1993. (z angl. originálu The Atlas of Ancient World, Marshall edition, London, 1992).

[Scr00] Scriba, C. J.–Schreiber, P. *5000 Jahre Geometrie: Geschichte Kulturen Menschen.* Springer, Berlin, 2000.

[Svo73] Svoboda, L., ed. *Encyklopedie antiky.* Academia, Praha, 1973.

[Vop89] Vopěnka, P. *Rozpravy s geometrií.* Academia, Praha, 1989.

Kapitola 2

Křivky v antické geometrii

> *Antika je opojena božským darem, jímž je geometrický svět. Je to dar, k němuž se upíná a jímž je ovlivněn hlavní směr jejího myšlení a konání.*
> Vopěnka [Vop89, str. 66]

Antikou dnes rozumíme období starověkého Řecka a Říma zahrnující časový úsek přibližně od 14. století př. Kr. do roku 476 po Kr., kdy došlo k zániku Západořímské říše.[1]

Národy žijící na území Řecka mají proti jiným evropským společnostem jednu zvláštnost – nejdále do minulosti sahající písemné zaznamenávání událostí, ke kterým na tomto území došlo.[2] Přesto jsou tyto dochované písemnosti pouze útržkem odkazu minulosti. Zprávy týkající se geometrie nejstaršího období nám úplně chybí nebo pocházejí ze záznamů pořízených mnohem později. Proto by všechna uváděná fakta v textu, životní data atd. měla být opatřena slůvkem „pravděpodobně“, „asi“, „nejspíše“, „cca“ apod. Ačkoliv upouštíme od neustálého opakování těchto slov, nechť to má čtenář na paměti.

V době bronzové (3. a 2. tisíciletí př. Kr.) se na území pozdější rozvi-

[1] Výraz *antika* pochází z latinského *antiquus* – starý, starobylý. Původně termín antika označoval pouze řecké a římské umělecké památky, jež byly chápány jako klasický vzor krásy. Novodobé chápání antiky jako historické epochy, ve které zásluhou řeckých i římských tvůrců vznikal základ evropské vzdělanosti, bylo plně prosazeno teprve na počátku 20. století.
Počátek antiky – datovaný dříve do 9. století př. Kr. (doba vzniku Homérských básní) – byl po rozluštění hliněných tabulek popsaných krétsko-mykénským písmem posunut do století čtrnáctého. Jako konec se nejčastěji uvádí rok 476 pro západní část (zánik Západořímské říše) a rok 529 pro část východní (zavření „pohanských“ filozofických škol), [Svo73, str. 57].

[2] Mykénské nápisy – 2. tisíciletí př. Kr. [Hra98, str.].

7. tis.	neolitické kultury		
3. a 2. tis.	krétsko–mykénská kultura		
cca 13. st.	zničení mykénské civilizace		
12.–9. stol.	„temná staletí“	9.–8. st.	geometrický styl
8.–6. stol.	**archaické období** (městské státy)		
776	podle tradice 1. olympijské hry		
6. stol.	založen Peloponéský spolek	600–550	milétská škola (Thales)
561–528	vzestup Athén za Peisistrata		
500–336	**klasické období**	580–520	Pythagoras
500–449	řecko–perské války		
478/7	zal. 1. athénský nám. spolek	470–410	Hippokrates
431–404	peloponéská válka	460–400	Hippias
404	kapitulace Athén		
404–403	vláda 30 tyranů v Athénách	428–350	Archytas
		399	smrt Sokratova
378/7	zal. 2. athénský nám. spolek		
		347	smrt Platonova
336	zavražděn Filip II. Makedonský		
336–30	**helénistické období**	332/1	založena Alexandrie
336–323	vláda Alexandra Velikého	322	smrt Aristotelova
323–322	povstání Řeků proti Makedonii	300	Eukleides *Základy*
223–187	Antiochos III. vládce Malé Asie	287–212	Archimedes
222/1–179	Filip V. vládcem v Makedonii	210	Apollónios *Kuželosečky*
215–205	první makedonská válka		
200–197	druhá makedonská válka		
171–168	třetí makedonská válka		
148	Makedonie římskou provincií		
146	vyvrácení Korintu Římany		
86	dobytí Athén Sullou		
30	pád Alexandrie; smrt Kleopatry		
170	vpád Kostobotů do Řecka		
276	vpád Hunů do Řecka		
313	edikt Milánský (povoleno křesťanství)	290–350	Pappos
324	založena Konstantinopol		
378	porážka Římanů Góty		
393	poslední antické olympijské hry		
395	rozdělení římské říše	411–485	Proklos
476	zánik západořímské říše	480–540	Eutokios

Tabulka 2.1: Orientační přehled historického vývoje antického světa, vpravo významné osobnosti a události ovlivňující vývoj geometrie (podle [Hra98], [Scr00]).

nuté antické civilizace objevuje tzv. krétsko–mykénská kultura (Minojská Kréta, Mykénské Řecko). Již v této době se objevují na kykladských ostrovech geometrické motivy na keramice, což ukazuje na jistý stupeň abstrakce a pochopení tvaru:

Keramika byla vyráběna ještě bez hrnčířského kruhu a byla zdobena motivy ze spirál a kruhů. [Hra98, str. 15]

Během temných staletí došlo na území dnešního Řecka k hlubokému úpadku v hospodářském a kulturním vývoji. Přesto se udržela jistá kontinuita, kterou můžeme sledovat zejména na výrobě keramiky – opět s geometrickými motivy.

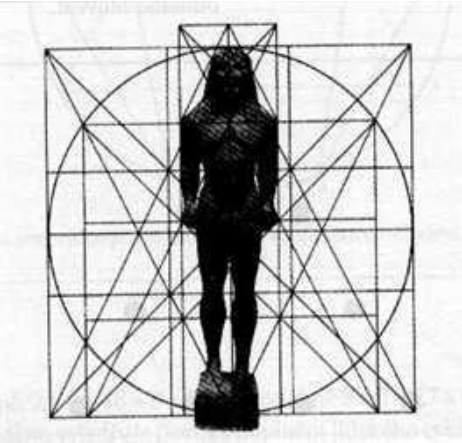
Na tzv. submykénský styl, jenž následoval po zániku mykénských paláců, navázal – především v Attice – protogeometrický styl, jenž byl předzvěstí nového rozvoje hrnčířské výroby a vyústil v 9. stol v ***geometrický styl****, který se rychle rozšířil nejen na řecké pevnině, nýbrž i na ostrovech v Egejském moři.* [Hra98, str. 21]

O tom, jaké byly geometrické znalosti této civilizace a do jaké míry souvisely s geometrickými motivy na užitkových předmětech, můžeme jen spekulovat, ale jisté je, že mnohé ze zobrazených geometrických motivů musely být určitými znalostmi podloženy. Např. s tvarem pravidelného pětiúhelníka, který vyžaduje konstrukci založenou na tzv. zlatém řezu, se setkáváme už na vázách ze 7. století př. Kr.[3]

Za vnější podobou uměleckých děl, které Řekové vytvořili, se skrývají neměnné zákony čísel a tvarů. Ve formě geometrických pouček jsou tyto konstrukční zákony založeny na vztazích, jež byly přineseny z Egypta, a to nejprve mínojskými Kréťany [. . .] Posvátná geometrie, zejména v podobě pravidel „kruhu a čtverce“ a zlatého řezu, ozřejmuje zákony, podle nichž hmota vychází z ducha a vrací se k němu. V řecké kultuře byly tyto proporce jasně vyjádřeny v keramice. Mínojské a mykénské nádoby odhalují zlatý řez jako rozhodující pravidlo, které určovalo práci hrnčířů. [Gel04, str. 100–102]

Právě toto silné mystické zaujetí pro geometrii se stalo snad ještě více než potřeby praxe hnacím motorem pro její další pokrok (obr. 2.1). Ten lze výrazně zaznamenat od 6. století př. Kr., kdy se poprvé u ionských Řeků objevuje snaha podat nový výklad světa, spíše přírodovědecký než

[3] [Kol68, str. 107]. Termín „zlatý řez“ pochází však až od Leonarda da Vinci z 15. století.



(a) Kruh a čtverec jako východisko proporcí antické sochy



(b) Geometrické ornamenty na keramice, 9. stol. př. Kr.

Obrázek 2.1: Geometrie v nejstarším období řecké civilizace

mystický.[4] Významnou součástí tohoto výkladu byla také matematika (aritmetika i geometrie), která začala být pěstována jako věda. Řekové se zabývali problémy pro to, aby jim porozuměli, nikoliv jen pro to, aby řešili nějakou praktickou úlohu. Jinak řečeno zabývali se problémem pro problém samotný. Byl to významný kvalitativní skok ve srovnání s matematikou pěstovanou ve starších civilizacích (Egyptě, Mezopotámii apod.)[5] a my se proto tímto obdobím budeme zabývat podrobněji.

Rané období řeckého myšlení začíná školou milétskou (600–550 př. Kr., Thales[6], Anaximandros, Anaximenes) a vrcholí v době rozkvětu Athén (Sokrates, Platon, Aristoteles).

Platonova idealistická škola neviděla význam geometrie (a matema-

[4]Pozoruhodné je, že v této době hlásali své vědění také Konfucius, Lao'c a Buddha. V 6. století př. Kr. otevřely písemné záznamy na celém světě dveře do skrytých svatyní. Viz [Gel04, str. 95].

[5]Rozhodně však nelze říci, že by matematika těchto civilizací byla jen souborem předpisů pro řešení praktických úloh, přece však kvalitativní zlom, který nastal v antice je značný.

[6]Historikové matematiky se všeobecně shodují na tom, že geometrické znalosti přišly do Řecka z Egypta a přinesl je Thales.
Thales první z milétských filozofů navštívil na obchodní cestě Egypt a přinesl si odtud znalost geometrie. [...] *Říká se, že zdokonalil egyptskou geometrii také v tom důležitém ohledu, že pochopil podmínky obecného důkazu lépe než Egypťané. Nejen věděl, že kruh je rozpůlen svým průměrem, nýbrž to i dokázal.* [...] *Velká Thaletova sláva však není založena na jeho znalostech geometrie nebo na jeho obchodní zdatnosti, nýbrž na jeho novém, rozumovém způsobu, jímž pohlížel na svět věcí.* Viz [Far50, str. 37].

tiky vůbec) v jejím praktickém využití – to dokonce považovala za ponižující, geometrii pokládala za vzor logiky a její ovládání za základ porozumění filozofii. Nad vchodem do Platonovy akademie prý býval nápis ΑΓΕΟΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΟ, což volně přeloženo znamená „Nevstupuj, kdo neovládáš geometrii!“ [Kat98, str. 52].

V *Ústavě* [Pla93, VI, 510] praví Platon o geometrech: *Víte, že používají viditelných obrazců a vyvozují z nich důkazy, ale činíce tak, nemyslí na tyto obrazce, ale na věci, které představují. Absolutní čtverec a absolutní průměr jsou předměty jejich argumentace, ne průměr, který kreslí.*

Nesmíme však zapomínat, že kromě Platonovy idealistické školy působila v tomto období také přírodovědecká a matematická škola Eudoxova (Eudoxos, Menaichmos,[7] Deinostratos[8] a další).

Menaichmos považoval matematické pravdy za problémy, protože nestačí pouze definovat rovnostranný trojúhelník, ale k důkazu jeho existence je nutné sestrojit a ověřit, zda vyhovuje podmínkám. [Kol68, str. 109]

Domyšleno do důsledků byl platonovský pohled obecnější, neboť nevylučoval studium útvarů, které neumíme sestrojit, ale Eudoxova škola přinášela přednosti studia reality, což podněcovalo – jak ukážeme dále – i studium křivek.

První období, někdy nazývané *hrdinským věkem*,[9] končí Aristotelovou smrtí roku 322 př. Kr.

Na počátku druhého, tzv. helénistického období, byla po tažení Alexandra Makedonského vytvořena ohromná říše. Ačkoliv se brzy rozpadla, vzájemný styk různých národů Alexandrovy říše měl výjimečný vliv na rozvoj jejich vědy a kultury. Nejvýznamnějšími středisky byly v té době Alexandrie, Antiochie, Pergamon a ostrov Rhodos. Pro vědu sehrála zásadní úlohu Alexandrie. Tamní středisko – Muzeion – uchovávalo několik set tisíc rukopisných svitků.

Matematika alexandrijské kultury, která zasahovala nejen do Egypta, nýbrž do všech helénistických zemí, dospěla na nejvyšší stupeň rozvoje, jaký kdy byl ve starověku. Zejména na začátku, v 3. stol. př. Kr., se shromáždili v Alexandrii nejvýznamnější učenci tehdejšího světa, mezi nimi tak významní matematici jako byli Eukleides, Eratostenos a Apollónios . Mezi tyto vědce patří i Archimedes.
[Kol68, str. 124]

[7] Menaichmos (380–320 př. Kr.).
[8] Deinostratos (390–320 př. Kr.), žák Platóna a Eudoxa, bratr Menaichmův.
[9] Viz [Hei33].

Na základě souhrnných prací, které v té době vznikaly,[10] bývá toto druhé období někdy nazýváno historiky vědy *věkem učebnic*. V těchto pracích byly shrnuty nejen tehdejší znalosti, ale i filozofický pohled na matematiku. Názory na rozvoj matematiky v tomto období se značně liší.[12] Nepřikláníme se k tomu, že by matematika již v druhé polovině helénistického období začala upadat, ale spíše se ztotožňujeme s těmi, kteří tvrdí, že docházelo ke změně jejího zaměření od čistě teoretické k aplikované a skutečný úpadek nastal mnohem později (3. století po Kr.). Jak uvidíme, lze tuto tendenci sledovat i na studiu křivek. Helénistické období trvá až do úplného podrobení Řecka Římany.[13]

Podmanění ptolemaiovského Egypta bylo dokončeno v roce 30 př. Kr. Alexandrie se za Římanů stala vědeckým střediskem celého římského imperia, ale alexandrijská matematika se výrazně lišila svým zaměřením od matematiky helénistického období. Částečně již započatý přechod k praktickému využití matematiky (pod vlivem zejména babylónských tradic) se během římské okupace ještě urychlil. Typickým příkladem tehdy pěstované aplikované geometrie je dílo Vitruviovo *Deset knih o architektuře* [Vit79] (viz str. 58). V této době žil i Klaudios Ptolemaios,[14] mimo jiné autor proslulého *Almagestu*[15] a dalších dvou astronomických prací značně využívajících geometrických znalostí (*Náčrtek* – pravoúhlá projekce nebeské sféry, *Planisférium* – sterografická projekce nebeské sféry). Zmiňuji se zde o něm proto, že se v jeho pracích, zejména v *Geografii* (viz obr. 2.2),[16] objevují zcela zřetelně první náznaky užití souřadnic.[17]

[10] Nejznámější jsou Eukleidovy[11] *Základy*, (řec. *Stoicheia*) ze 3. stol. před Kr.

[12] Řecká matematika vzešla ze stejných impulzů jako řecká filozofie. Na rozdíl od řecké filozofie, která svého vrcholu dosáhla již v období Platona a Aristotela (4. stol. př. Kr.), v geometrii je 4. století obdobím rozkvětu, jež bylo završeno zhruba o století později – zejména Eukleidovými *Základy* a Apoloniovými *Kuželosečkami*. Můžeme tedy říct, že zlatý věk řecké geometrie následoval těsně po zlatém věku řecké filozofie (viz např. [Tho80a, str. vii]), tj. zhruba ve 3. století př. Kr.
I když matematika v helénistických zemích zůstávala ve svém rozvoji na té úrovni, ke které dospěla kolem roku 200 př. Kr., bylo by nicméně chybné se domnívat, (...), že od této doby nastoupilo období úpadku antické matematiky. Viz [Kol68, str. 169].

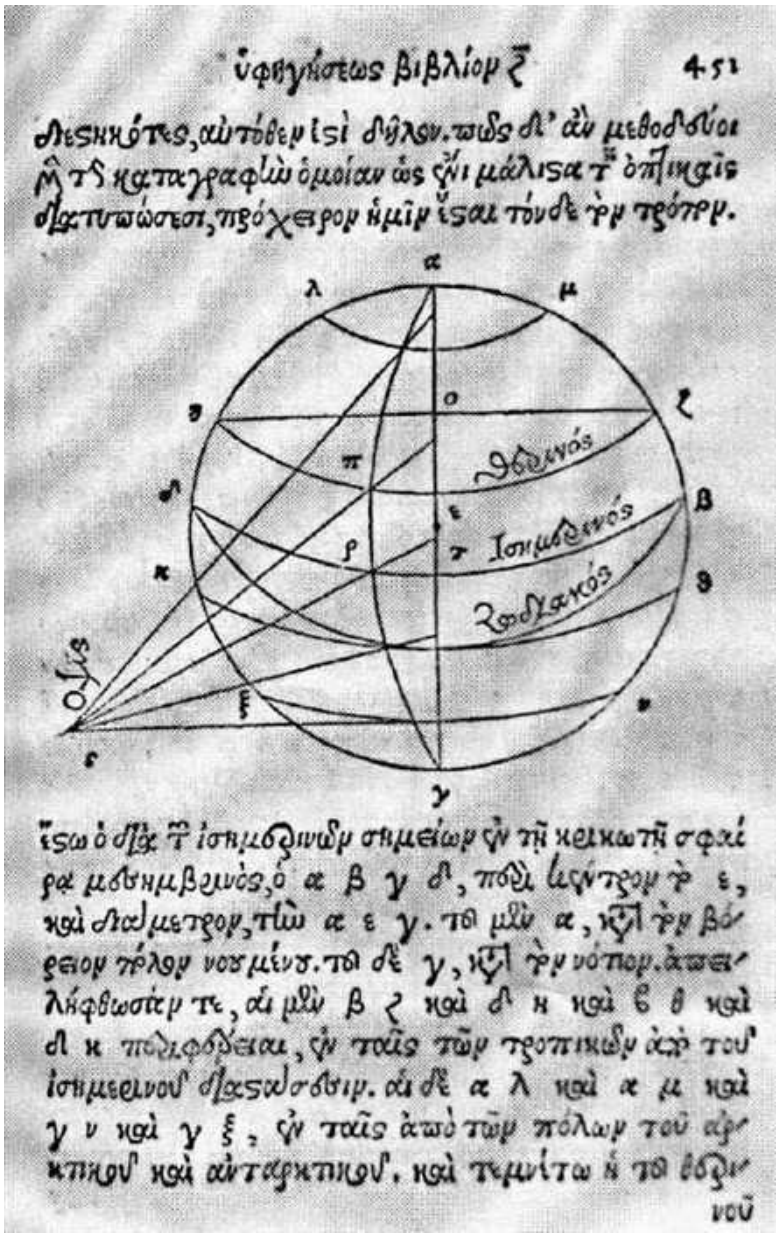
[13] *Do řeckých dějin vstupuje římská říše od 3. století př. Kr. V roce 146 př. Kr. Římané ovládli poslední řecké městské státy.* [Hra98, str. 687] V roce 30 př. Kr. byla dobyta Alexandrie.

[14] Klaudios Ptolemaios (85–168 po Kr.) významný řecký astronom, geograf a optik.

[15] *Almagest* je poarabštěný název z řeckého $\mathit{Μεγιστη\ συνταξις}$ – *Největší skladba*.

[16] Osmisvazkové dílo, ve kterém stanovil zeměpisnou délku a šířku 8000 bodů na zemském povrchu.

[17] Ačkoliv je nutno poznamenat, že mnohé výsledky obsažené v pracích Klaudia Ptolemaia patří zřejmě Hipparchovi (190–120 př. Kr.)



Obrázek 2.2: List z Ptolemiovy *Geografie*, vydání z roku 1533

Z posledního období antické kultury už zmiňujme vzhledem k vytyčenému tématu jen Pappa[18] a Prokla.[19] Zejména jim vděčíme za mnohé údaje o křivkách, které jsou uvedeny v následujících odstavcích. Především díky Pappově spisu, který dnes známe pod názvem *Sbírka*,[20] bývá někdy historiky 4. století nazýváno „Stříbrný věk" řecké matematiky, ale Pappos sám věděl, že žije v době úpadku, dával najevo úctu starému a nenávist současnému.[21] Odkazu Pappa a Prokla je věnován samostatný odstavec v závěru kapitoly.

Nutným důsledkem obecného úpadků zemí římského impéria byl i úpadek matematiky (a vědy vůbec). Po rozpadu antické společnosti (roku 445 padl Řím), se rychle vytrácely i geometrické znalosti.

[18] Pappos z Alexandrie (cca 290–350 po Kr.).

[19] Proklos (cca 410–485 po Kr.).

[20] Viz odstavec 2.2.9.

[21] *Pappus knew that he lived in a period of decline, and his reverence for the 'ancients' is matched by his disdain for his contemporaries.* Viz [Gra94, str. 65].

2.1. Pojetí geometrie ve starověku

Abychom porozuměli tomu, jak Řekové studovali křivky, musíme mít na paměti, že jejich pohled na geometrii se v mnohém odlišoval od pohledu dnešního.

- Odlišné chápání geometrických objektů.
- Problém vyjádřit pohyb a nekonečno.
- Geometrické chápání veličin.

Ovlivněni množinovým pojetím geometrie, pohlížíme v dnešní době na geometrické objekty obvykle jako na množiny bodů. [Vop89, str. 24]

Tohle však nebyl pohled starověkých geometrů. Bod byl pro ně něco, co nemá dílu, tj. základní nedělitelný prvek.[22] Jiné geometrické objekty se daly dělit. Velkým problémem v řecké geometrii (a matematice i filozofii vůbec) bylo pojetí pohybu a nekonečna. Kolem roku 450 př. Kr. vypracoval Zenon z Eley proslulé paradoxy pohybu. Ačkoliv je již Aristoteles[23] považoval za logické chyby, nepodařilo se jemu ani jiným starořeckým matematikům vyjádřit v logice pojmů rozpor mezi pohybem, prostorem a časem. „Aristotelovské“ pojetí pohybu bylo plně překonáno teprve v 17. století.[24]

Proto, aby se vyhnuli obtížím v dalším rozvíjení matematických základů a v jejich zdůvodňování, většinou raději buď vůbec v matematice nepoužili ideí nekonečna a pohybu, nebo je co nejvíce omezovali, přičemž tvrdili, že se věci a geometrické veličiny dají bez omezení dělit. [Kol68, str. 96]

Jak ukážeme dále, tento postoj měl velký vliv i na studium křivek.

Thomas [Tho80a, str. viii] vidí tři charakteristické rysy řecké matematiky (1) v preciznosti, se kterou velcí řečtí geometři demonstrovali, co dokazují, (2) v dominantnosti řecké geometrie a (3) v dokonalém způsobu práce. Výraznou dominantnost řecké geometrie a jisté podřízení aritmetiky geometrii můžeme pozorovat po objevu nesouměřitel-

[22] Viz [Ser07, str. 1].

[23] Aristoteles (384–322 př. Kr.)

[24] Při „Aristotelovském“ pojetí je potřebné k popisu pohybu tělesa znát jeho polohu v každém okamžiku. Teprve v 17. století bylo plně přijato, že pohybující se objekt prochází svou drahou bod po bodu, spojitě a ve spojitém čase.

nosti úseček[25] (pythagorejci, 5. stol. př. Kr.), kdy se zhroutily tehdejší představy o základech matematiky, tzv. první krize[26] matematiky. Východiskem z krize se stala *řecké geometrická algebra*.[27] Veličiny již nebyly chápány jako čísla (přirozená a jejich poměry), ale jako délky, obsahy a objemy (ale nikoliv reprezentovány čísly). Délky byly reprezentovány úsečkami, obsahy čtverci a objemy krychlemi, přičemž při operování s takovými veličinami bylo možno sčítat a odčítat jen veličiny „stejného druhu", tj. délky s délkami, obsahy s obsahy a objemy s objemy (tzv. zákon homogenity).[28] Všechny úměrnosti byly vyvozovány z podobnosti trojúhelníků a zacházelo se s nimi výhradně tímto způsobem. To pochopitelně velmi brzdilo vývoj algebry, neboť v geometrické algebře lze hovořit o součinu dvou veličin (obdélníku), tří veličin (kvádru), ale nelze už dost dobře hovořit o součinu čtyř veličin, nic tomu totiž neodpovídá. Pappos píše:

Nedlouho před námi se však někteří dohodli, že by se takové výrazy používat mohly, jenže neměli jasno, co by to mělo znamenat, když vynásobí obdélník čtvercem nebo jiným obdélníkem. [Des37, str. 306]

Ačkoliv budeme pro jednodušší vyjadřování používat v dalším textu dnešní „descartovskou" symboliku, je třeba mít na zřeteli, že vyjadřovací způsob starých Řeků byl díky geometrickému chápání veličin zcela odlišný (srovnání viz ukázky z textů – tabulky 2.1, 2.2, 2.3).

Operovat s těmito veličinami pak znamenalo provádět geometrickou konstrukci pravítkem a kružítkem, tj. sestrojit konečný počet kružnic a přímek (tato konstrukce je často nazývána *eukleidovská*, neboť na tomto principu byly vybudovány Eukleidovy *Základy*). Je snadné si představit např. operace s úsečkami.

Kupodivu největší potíže nastaly u proměn křivek. Jiné křivky než lomené čáry se nepodařilo proměnit v úsečky. Tedy to, co vlastně napínači

[25] Dvě úsečky délky a, b se nazývají nesouměřitelné, jestliže neexistuje úsečka délky j tak, že úsečky a, b se dají vyjádřit jako její násobky, tj. $a = p \cdot j$, $b = q \cdot j$, kde $p, q \in \mathbb{N}$. Příkladem dvou nesouměřitelných úseček je strana a úhlopříčka čtverce.

[26] Druhá krize matematiky, jenž byla spojena s pojmem nekonečně malé veličiny, byla překonána v 19. století precizním vybudováním základů matematické analýzy, tzv. aritmetizací matematické analýzy. Třetí krize matematiky souvisí s objevením antinomií v teorii množin na počátku 20. století a do jisté míry byla překonána požadavky na axiomatické budování teorií.

[27] Termínem *řecká geometrická algebra* je míněn přechod od aritmetického chápání veličin ke geometrickému. Jedná se tedy spíše o *geometrickou aritmetiku* než *algebru*. Pojem algebra má význam obecnější.

[28] Zákon homogenity a podřízení aritmetiky geometrii byly překonány v plné míře teprve R. Descartem v 17. století (str. 108).

provazců prováděli denně, nemělo v geometrii žádný výklad. [Vop89, str. 60]

Je třeba převést křivku na úsečku stejné délky. Pokud budeme uvažovat kružnici, pak tu máme problém rektifikace kružnice. Obecně jde o problém rektifikace libovolné křivky. Obdobně bychom mohli pokračovat v úvahách o sčítání a odčítání úhlů apod.

Není nijak překvapivé, že při tomto pojetí veličin a operací s nimi, došli Řekové k třem proslulým problémům starověku: [29]

- kvadratura kruhu – k danému kruhu najít čtverec o stejném obsahu, což úzce souvisí s rektifikací kružnice,
- zdvojení krychle – k dané krychli najít krychli o dvojnásobném objemu,
- trisekce úhlu – daný úhel rozdělit na tři stejné části.

Závažnost těchto problémů tkví v tom, že nemohou být řešeny geometricky bez aproximace, tj. konstrukcí užívajících konečného počtu přímek a kružnic; právě proto se staly prostředkem k pronikání do nových oblastí matematiky. Vedly k objevení kuželoseček, některých kubických křivek, křivek čtvrtého řádu a jedné transcendentní křivky - kvadratrix. [Str63, str. 37]

Ukážeme, že ve starověku bylo v podstatě objevení všech křivek podmíněno snahou najít řešení těchto tří problémů.

[29] Tři proslulé problémy starověku „trápily“ matematiky až do 19. století, kdy bylo dokázáno, že jsou eukleidovsky neřešitelné, tj. nelze najít přesné řešení požadovanou metodou – eukleidovskou konstrukcí. Pro praxi pochopitelně stačí vhodné přibližné řešení, které bylo již ve starověku užíváno. Stručné výstižné pojednání o tom, jak je to s neřešitelností těchto úloh lze najít např. v [Fuc93, str. 90], více k rektifikaci kružnice viz str. 164 této práce.

2.2. Křivky popsané ve starověku

2.2.1. Křivka, přímka a kružnice u Eukleida

Přímkou rozuměli Řekové něco omezeného. Ukážeme, jak pojednává o přímce a kružnici Eukleides v axiomaticky budovaném spise *Základy*. Eukleidovy *Základy* jsou snad jednou z nejslavnějších knih v historii, která se na více než dva tisíce let stala vzorem pro výuku geometrie. Svůj stěžejní význam snad více než obsah má právě forma *Základů*, totiž formulace poznatků do definic, postulátů a vět. Této formě vděčíme také za to, že zde nalézáme první historicky doloženou definici křivky. Eukleidovy *Základy* jsou studovány v řadě odborných článků a monografií, odkazujeme čtenáře na [Beč02]. Zde se budeme zabývat jen některými pasážemi první knihy, které bezprostředně souvisí s naším tématem.[30]

V první knize Eukleidových Základů se v úvodu nachází 23 definic, 5 postulátů a 9 axiomů, za kterými následují tvrzení s důkazy. Citujeme první definice:

1. Bod jest, co nemá dílu.
2. Čára pak délka bez šířky.
3. Hranicemi čáry jsou body.
4. Přímá jest čára (přímka), která svými body táhne se rovně. [Ser07, str. 1]

Ona první historicky doložená definice křivky se skrývá v Eukleidově druhé definici. I když nejde pochopitelně o exaktně přesnou definici (neboť není řečeno, co je to délka a co je to šířka), je zde intuitivně velmi dobře vystižena vlastnost, kterou se křivka odlišuje od rovinných útvarů a kterou se v moderní matematice snažili matematikové exaktně zachytit, jak uvidíme v kapitole šesté. Přímo z druhé definice nelze sice přímo říci, jaký typ čáry má Eukleides na mysli, ale je zřejmé, že nemíní přímku, nýbrž křivku, protože přímka je definována následně v definici čtvrté. Pojetí křivky upřesňuje také definice třetí, z níž plyne, že je na ni pohlíženo jako na objekt konečný, ohraničený dvěma body. Také přímkou rozuměli Řekové něco omezeného. Eukleides v podstatě definuje úsečku, nikoliv přímku, ale s tím, že tuto úsečku můžeme dle potřeby libovolně prodloužit. Opět se tím vyhne pojmu nekonečno.

V úvodních postulátech[31] říká:

[30] Vycházíme z českého překladu Františka Servíta (1848–1923), jediného kompletního překladu, který byl u nás vydán – [Ser07].

[31] V překladu F. Servíta je užit termín *úkoly prvotné*, dnes se však běžně užívá termínu postuláty.

1. Budiž úkolem od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu vésti přímku.
2. A přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužiti. (...) [Ser07, str. 2]

Kružnice je poněkud skrytě zavedena v definici kruhu:

15. Kruh jest útvar rovinný, objímaný jedinou čarou (jež se nazývá obvodem), k níž od jednoho bodu uvnitř útvaru vedené přímky všecky sobě rovny jsou.
16. Středem pak kruhu zove se ten bod. [Ser07, str. 1]

V jiném českém překladu, který však zůstal jen v rukopise[32] je tato definice uvedena v trochu jiném znění, kde se přímo termín kružnice vyskytuje:

15. Kruh jest obrazec plochý, omezený jedinou čarou, řečenou kružnice; od této veškeré přímky vedené k témuž bodu uvnitř kruhu ležícímu jsou si rovny.
16. Bod ten zove se střed kruhu. [Bečo2, str. 132]

2.2.2. Hippiova kvadratrix

První studovaná křivka po kružnici a přímce byla transcendentní ***Hippiova kvadratrix***. V 5. století př. Kr. ji popsal Hippias z Elis[33] jako křivku, kterou lze užít k trisekci úhlu (proto ji můžeme v literatuře najít také pod názvem *Hippiova trisektris*). Později ji Deinostratos[34] aplikoval k řešení kvadratury kruhu a odtud dostala název.[35]

Hippias převedl problém dělení úhlu na problém dělení úsečky. V dnešní terminologii můžeme jeho definici kvadratrix vyjádřit následovně:
Uvažujme čtverec $ABCD$ (viz obr. 2.4 a) a dva pohyby takové, že:

(1) úsečka AB se otáčí kolem bodu A (proti směru hodinových ručiček),

(2) úsečka BC se posouvá ve směru $\overrightarrow{CD}$,

(3) oba pohyby jsou rovnoměrné a ve stejný okamžik začnou i skončí,

pak průsečík X pohybujících se úseček AB a BC opíše křivku z bodu B do bodu H.[36]

[32] Překlad první knihy Eukleidových *Základů* od Josefa Smolíka (1832–1915). Viz [Bečo2, str. 3].

[33] Hippias z Elis (470–410 př. Kr.).

[34] Deinostratos (390–320 př. Kr.), žák Platóna a Eudoxa, bratr Menaichmův.

[35] Kvadratrix je obecně název pro křivku, kterou lze užít ke kvadratuře kruhu a trisektris pro křivku, kterou lze užít k trisekci úhlu. Teprve ve spojení se jménem objevitele, se jedná o konkrétní křivku.

[36] S ohledem na naše zvyklosti uvažuji čtverec $ABCD$ popsaný proti směru hodinových ručiček. Křivku lze uvažovat i v transformovaném čtverci $ABCD$, jak je uvedeno např. v [Tho80a, str. 336] (viz obr. 2.3).

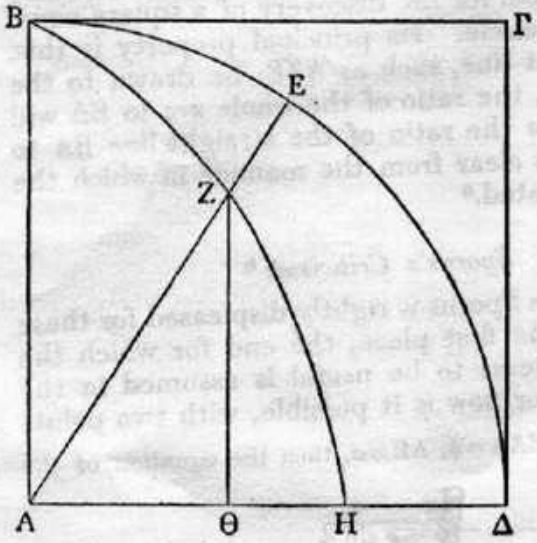
(ii.) *The Quadratrix*

Papp. *Coll.* iv. 30. 45–32. 50, ed. Hultsch 250. 33–258. 19

Construction of the Curve

λ′. Εἰς τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου παρελήφθη τις ὑπὸ Δεινοστράτου καὶ Νικομήδους γραμμὴ καί τινων ἄλλων νεωτέρων ἀπὸ τοῦ περὶ αὐτὴν συμπτώματος λαβοῦσα τοὔνομα· καλεῖται γὰρ ὑπ' αὐτῶν τετραγωνίζουσα καὶ γένεσιν ἔχει τοιαύτην.

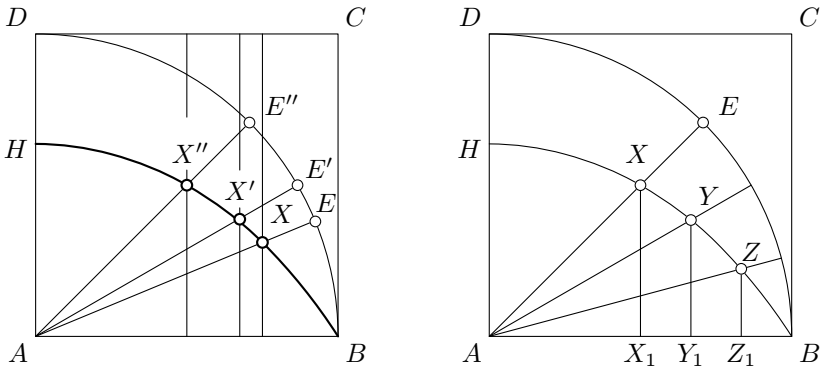
Ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ καὶ περὶ κέντρον τὸ Α περιφέρεια γεγράφθω ἡ ΒΕΔ, καὶ



κινείσθω ἡ μὲν ΑΒ οὕτως ὥστε τὸ μὲν Α σημεῖον μένειν τὸ δὲ Β φέρεσθαι κατὰ τὴν ΒΕΔ περιφέρειαν, ἡ δὲ ΒΓ παράλληλος ἀεὶ διαμένουσα τῇ ΑΔ τῷ Β σημείῳ φερομένῳ[1] κατὰ τῆς ΒΑ συνακολουθείτω, καὶ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ᾗ τε ΑΒ κινουμένη

336

Obrázek 2.3: Popis Hippiovy kvadratrix podle [Tho80a, str. 336]



Obrázek 2.4: a) Hippiova kvadratrix b) Trisekce úhlu pomocí Hippiovy kvadratrix

Ukážeme, jak lze pomocí této křivky rozdělit libovolný daný úhel na tři části:

Nechť je dán úhel EAB. Ve čtverci $ABCD$ sestrojíme kvadratrix q (výše uvedenou konstrukcí) a úhel EAB – viz obr. 2.4 b). Kolmý průmět bodu $X = q \cap \mapsto AE$ označíme X_1. Úsečku X_1B rozdělíme na tři části. Bodům Y_1, Z_1 odpovídají body Y, Z na q. Z definice Hippiovy kvadratrix plyne, že polopřímky AY, AZ dělí úhel EAB na tři stejné části. Ihned je také vidět, že takto lze daný úhel obecně rozdělit na libovolný počet částí. Problém trisekce úhlu tím ale není vyřešen eukleidovsky, neboť pomocí pravítka a kružítka lze sestrojit jen některé body kvadratrix q. Celou křivku můžeme znázornit např. přiložením vhodného křivítka vynesenými body.

S dnešním matematickým aparátem můžeme pro libovolný bod $X[x, y]$ v souřadném systému $\langle A, x, y\rangle$, $x \sim AB$, $y \sim AD$, psát (z definice Hippiovy křivky)

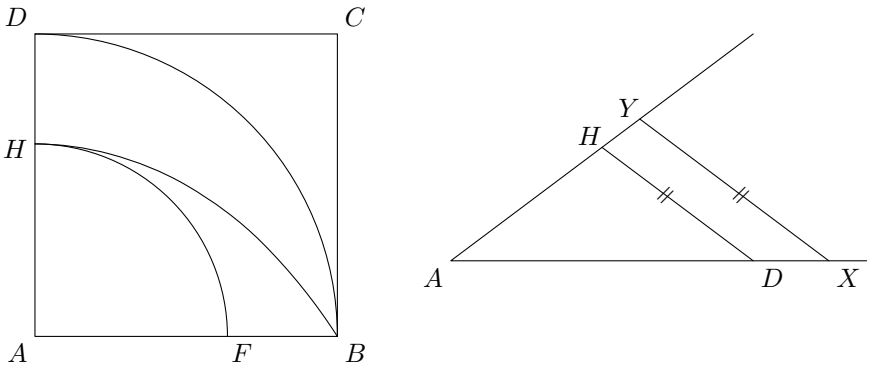
$$|\sphericalangle XAB| : \frac{\pi}{2} = (|AB| - x) : |AB|. \tag{2.1}$$

Označme $|AB| = a$ a $|\sphericalangle XAB| = t$, přičemž je zřejmé, že $|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle EAB|$. Potom

$$t = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{x}{a}), \qquad \text{tj. } y = x \cdot \operatorname{tg} t = x \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1 - \frac{x}{a})$$

a odtud

$$y = x \cdot \operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2a}. \tag{2.2}$$



Obrázek 2.5: a), b) Rektifikace kružnice pomocí Hippiovy kvadratrix

Pokud bod X přejde do mezní polohy $X = H$ (pohybující se úsečky AB a BC z definice kvadratrix v této poloze splývají), vyjádříme tuto skutečnost v dnešní terminologii opět snadno

$$y = \lim_{x \longrightarrow 0} \left(x \cdot \operatorname{cotg} \frac{\pi x}{2a} \right) = \frac{2a}{\pi}. \tag{2.3}$$

Z (2.2) je ihned vidět, že tato křivka má nekonečně mnoho větví a (2.3) ukazuje souvislost mezi kvadratrix a kvadraturou kruhu. Tohle však pochopitelně nebyl pohled starověkých Řeků. Ve starověku nebyl používán žádný symbolický zápis či rovnice, avšak už Deinostratos přišel na to, že Hippiovu kvadratrix lze užít ke kvadratuře kruhu. Deinostratos neužil limitního přechodu, ale metodou nepřímého důkazu dokázal, že oblouk $\widehat{BD}$ je s úsečkami AH, AD (obr. 2.5 a) v následujícím vztahu[37]

$$\frac{AH}{AD} = \frac{AD}{\widehat{BD}}. \tag{2.4}$$

Z podobnosti kružnic obdržíme

$$\frac{AH}{AD} = \frac{\widehat{FH}}{\widehat{BD}}, \tag{2.5}$$

odsud a z (2.4) $AD = \widehat{FH}$.

[37] Přičemž Deinostratos vyloučil případy, kdy by geometrická úměrná byla splněna pro bod $Y \in AD$, $Y \neq H$. Podrobný postup např. v [Tho80a, str. 343]. Jedná se o historicky první příklad užití nepřímého důkazu (viz [Kol68, str. 103]).

Z uvedeného plyne snadná rektifikace libovolné kružnice. Máme–li zkonstruovanou kvadratrix, naneseme na ramena libovolného úhlu α délky AH a AD a platí (obr. 2.5 b): čtvrtkružnice o poloměru AY je rovna délce úsečky AX.

Zdaleka ne všichni učenci však byli s takovými metodami srozuměni. Např. užití kvadratrix jako praktické metody pro kvadraturu kruhu ostře kritizoval Sporus[38] (viz tabulka 2.1).

Zdůrazněme na závěr, že Řekové vyšetřovali jen omezenou část jedné větve křivky. To, že takto definovaná kvadratrix je součástí křivky, která má nekonečný počet větví, bylo ukázáno teprve v roce 1650 (viz str. 148).

2.2.3. Kuželosečky

Další křivky, které se objevují (kromě kružnice a přímky) po Hippiově kvadratrix, jsou ***kuželosečky***. Okolnosti kolem jejich původu nejsou úplně jasné. Jejich objevení s největší pravděpodobností souviselo s problémem zdvojení krychle.

Přibližně v 5. století př. Kr. Hippokrates z Chiu redukoval tento problém na problém nalezení dvou středních geometrických úměrných.[39] V naší dnešní terminologii bychom jeho úvahu vyjádřili přibližně takto: Nechť a je hrana krychle. Je třeba najít x, y tak, aby platilo

$$a : x = x : y = y : 2a, \tag{2.6}$$

tj. aby platily kterékoliv dvě z následujících rovnic

$$x^2 = ay,\ y^2 = 2ax,\ xy = 2a. \tag{2.7}$$

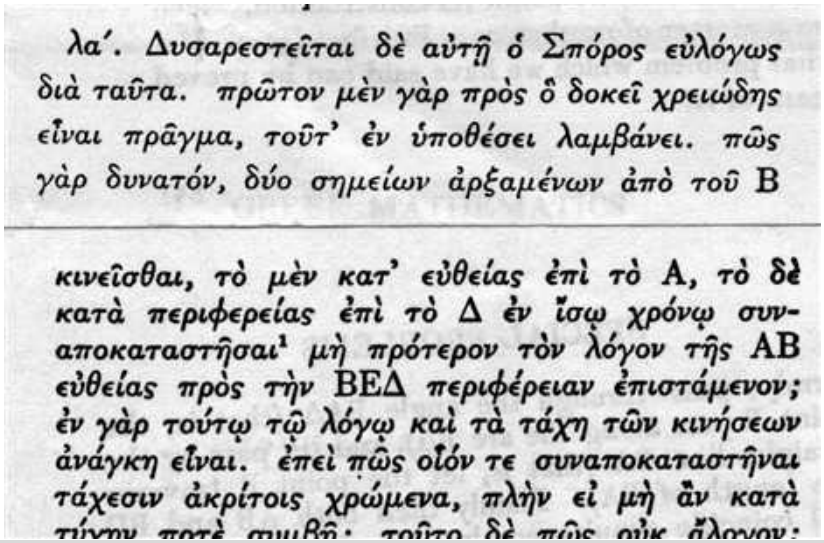
Vyloučením y obdržíme $x^3 = 2a^2$, tedy x je hrana hledané krychle.

Od Eutokia[40] se dozvídáme, že kolem roku 350 př. Kr. Menaichmos jako první nalezl dva způsoby řešení – průsečík dvou parabol a průsečík paraboly s rovnoosou hyperbolou. Ukázal, že průsečík těchto křivek dává očekávané hodnoty x, y, a řeší problém zdvojení krychle. Není přesně známo, jak tyto křivky Menaichmos sestrojil. Ačkoliv kompletně nelze zkonstruovat tyto křivky eukleidovsky, jednotlivé body zkonstruovat můžeme. Popišme stručně Menaichmovu myšlenku. Uvažujme v rovině dvě vzájemně kolmé přímky p, q. Jejich průsečík označme S (obr. 2.6). Dále

[38] Sporus (3. století po Kr.).

[39] Obecně problém nalezení dvou středních geometrických úměrných značí nalézt ke dvěma daným veličinám a, b veličiny x, y tak, aby platilo $a : x = x : y = y : b$.

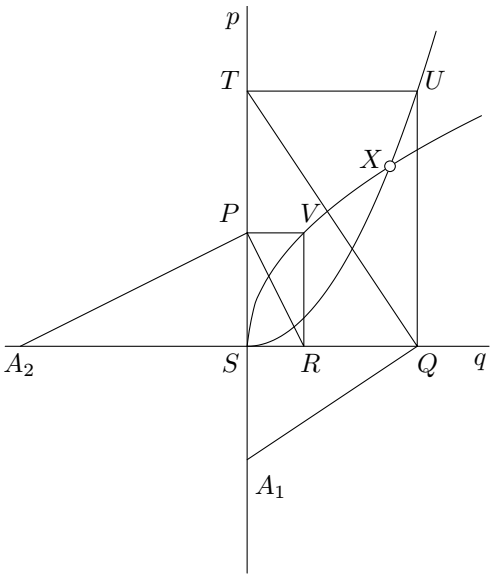
[40] Eutokius z Askalonu (5. stol. př. Kr.).



λα΄. Δυσαρεστεῖται δὲ αὐτῇ ὁ Σπόρος εὐλόγως διὰ ταῦτα. πρῶτον μὲν γὰρ πρὸς ὃ δοκεῖ χρειώδης εἶναι πρᾶγμα, τοῦτ' ἐν ὑποθέσει λαμβάνει. πῶς γὰρ δυνατόν, δύο σημείων ἀρξαμένων ἀπὸ τοῦ Β κινεῖσθαι, τὸ μὲν κατ' εὐθείας ἐπὶ τὸ Α, τὸ δὲ κατὰ περιφερείας ἐπὶ τὸ Δ ἐν ἴσῳ χρόνῳ συναποκαταστῆσαι[1] μὴ πρότερον τὸν λόγον τῆς ΑΒ εὐθείας πρὸς τὴν ΒΕΔ περιφέρειαν ἐπιστάμενον; ἐν γὰρ τούτῳ τῷ λόγῳ καὶ τὰ τάχη τῶν κινήσεων ἀνάγκη εἶναι. ἐπεὶ πῶς οἷόν τε συναποκαταστῆναι τάχεσιν ἀκρίτοις χρώμενα, πλὴν εἰ μὴ ἂν κατὰ τύχην ποτὲ συμβῇ· τοῦτο δὲ πῶς οὐκ ἄλογον;

31. Sporus oprávněně není potěšen tímto výsledkem. Zaprvé závěr, pro který se konstrukce zdá být užitečná je předpokládán jako hypotéza. Proto jak je možné se dvěma body začít pohybovat z B, s jedním z nich podél přímky do bodu A a s druhým podél kružnice do Δ ve stejném čase, pokud neznáme poměr délek úsečky AB a oblouku BEΔ? K tomu je nezbytné, aby rychlosti pohybujících se bodů byly v tomto poměru. A jak by pak bylo možné použitím nepřizpůsobené rychlosti vést pohyby společně do konce, aniž bychom je mohli občas změnit?

Tabulka 2.2: Sporus – kritika užití Hippiovy kvadratrix jako praktické metody pro kvadraturu kruhu (z Pappova díla *Sbírka (Synagoge)* podle Thomase [Tho80a, str. 338–341]).



Obrázek 2.6: Kuželosečky

uvažujme veličinu $a = |SA_1|$. Nechť $2a = |SA_2|$, $A_1 \in p$, $A_2 \in q$. Uvažujme bod Q pohybující se z bodu S ve směru opačném k polopřímce SA_2. K tomuto bodu Q existuje právě jediný bod T tak, že $\sphericalangle A_1QT$ je pravý, a právě jediný obdélník $SQUT$. Z podobnosti trojúhelníků A_1SQ a QST obdržíme

$$\frac{SA_1}{SQ} = \frac{SQ}{ST}$$

tj.

$$SQ^2 = ST \cdot SA_1. \tag{2.8}$$

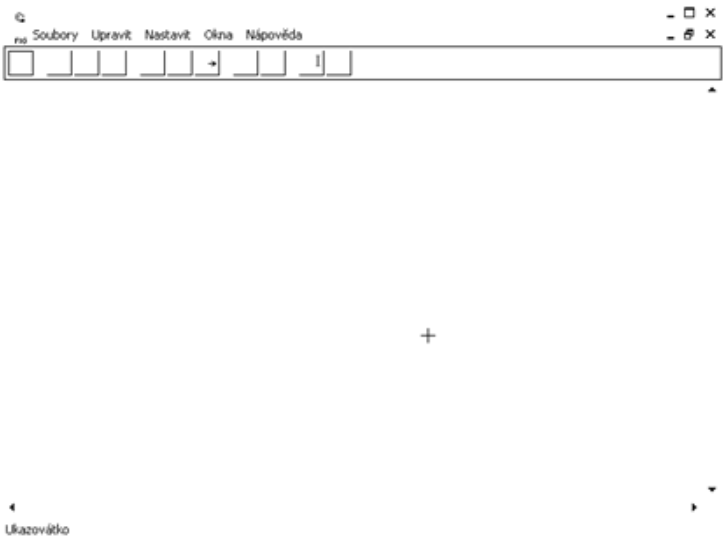
Obdobnou úvahu provedeme pro bod P pohybující se po přímce p (obr. 2.6). Potom

$$SP^2 = SR \cdot SA_2. \tag{2.9}$$

Odtud plyne, že pohybuje–li se bod Q po přímce q a bod P po přímce p, pak se body U, V pohybují po parabolách (2.8), (2.9). V souřadném systému $\langle S, x, y\rangle$, $x \sim q$, $y \sim p$, $U = [u_1, u_2]$, $V = [v_1, v_2]$ můžeme vyjádřit tyto paraboly jako

$$a : u_1 = u_1 : u_2, \qquad \text{tj.} \quad u_1^2 = a \cdot u_2, \tag{2.10}$$

$$2a : v_2 = v_2 : v_1, \qquad \text{tj.} \quad v_2^2 = 2a \cdot v_1. \tag{2.11}$$



Obrázek 2.7: Způsob nalezení kuželoseček podle Menaichmose demonstrovaný v Cabri Geometrii

Průsečík parabol označme $X = [x, y]$. Potom (viz obr. 2.6)

$$a : x = x : y, \qquad \text{tj.} \quad x^2 = a \cdot y, \tag{2.12}$$

$$2a : y = y : x, \qquad \text{tj.} \quad y^2 = 2a \cdot x. \tag{2.13}$$

Snadno lze ukázat, že bod X leží také na hyperbole $xy = 2a$ s asymptotami p, q (viz obr. 2.7).

Odtud plyne, že jsou splněny podmínky (2.7) a uvedeným postupem můžeme ke každé veličině a najít veličiny x, y tak, aby platily vztahy (2.6). Konstrukce však nebude obecně eukleidovská. Veličiny x, y lze najít např. mechanicky pomocí nástroje, který prý na základě Menaichmovy úvahy sestrojil Platon.[41] O tom, jak přišli Řekové na to, že křivky objevené při řešení problému zdvojení krychle lze obdržet jako řezy na kuželi, můžeme dnes jen spekulovat.[42] Zajímavé je, že Menaichmos kuželosečky obdržel jako rovinné řezy rotačního kužele, přičemž rovina řezu byla vždy kolmá k vytvořující přímce. Jednotlivé typy kuželoseček obdržel změnou vrcholového úhlu kužele a odtud se také nazývaly

[41] Toto tzv. Platonovo řešení nepatří s největší pravděpodobností Platonovi, ale některému Menaichmovu současníku či pozdějšímu matematikovi. Viz např. [Kol68, str. 111], [Tho80a, str. 262].

[42] Např. Neugebauer se domnívá, že Menaichmos byl přiveden k jejich objevu slunečními hodinami. Viz [Neu49, str. 124].

sečnami ostrého, pravoúhlého a tupého kužele. Tento přístup přetrval až do Apollónia. S největší pravděpodobností znali Řekové elipsu také jako řez rotačního válce.

Ještě ve 4. století byla napsána dvě obsáhlá pojednání, v nichž byly uvedeny kuželosečky popsaným způsobem. Ačkoliv nebyla nalezena, můžeme si udělat částečnou představu o jejich obsahu podle Archimedových odkazů na základní věty o kuželosečkách. Na obě práce upozorňuje Pappos.

Aristaeus[43] napsal 5 knih týkajících se *solid loci* (řecký termín pro kuželosečky). Druhé pojednání napsal autor proslulých *Základů* Eukleides z Alexandrie. Pravděpodobně

... v tomto pojednání, které se skládá ze čtyř knih, Eukleides uspořádal a možná i doplnil před ním nahromaděné znalosti o tomto předmětu v rozsahu prvních tří Apolloniových knih. [Kol68, str. 141]

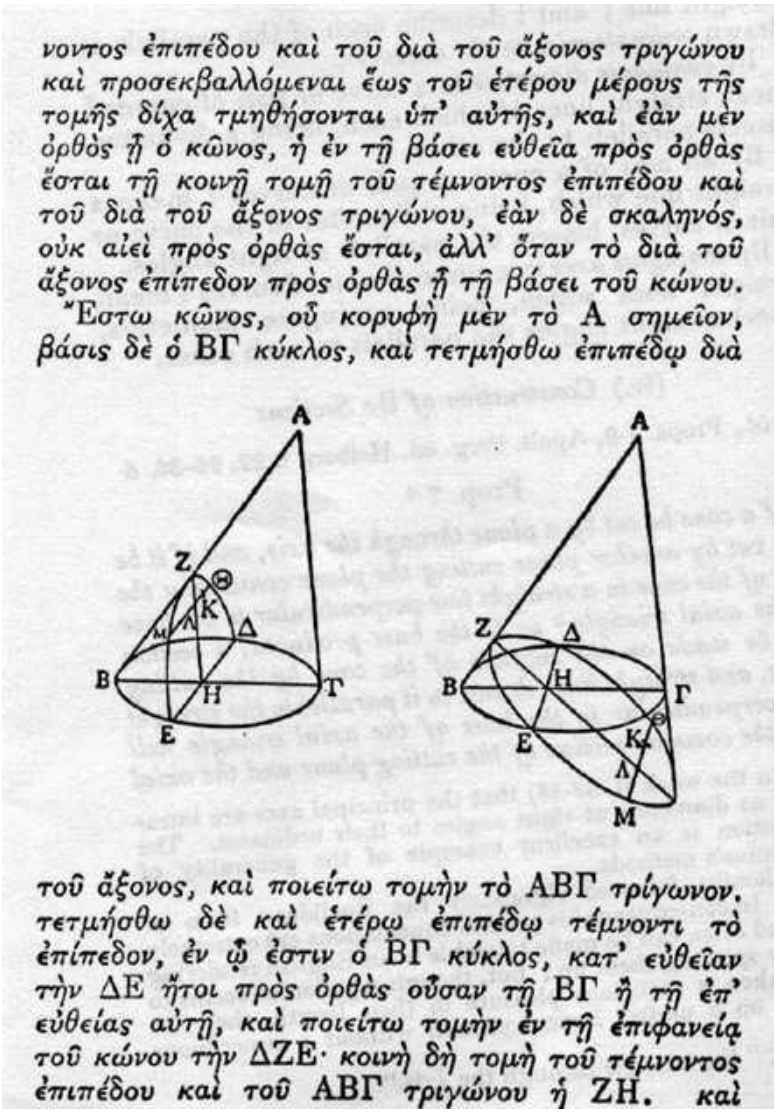
V *Základech* není teorie kuželoseček vyložena, i když byla tehdy již bezesporu rozpracována, neboť se nedá vyložit na základě eukleidovských konstrukcí. Ve dvou zmíněných pracích byly kuželosečky uvedeny bez jakéhokoliv využití. Základní věty o kuželosečkách uvádí až Archimedes.[44]

Apollóniův spis *O kuželosečkách*

Nejvýznamější spis o kuželosečkách a po Eukleidových *Základech* nejznámější dílo řecké matematiky – *O kuželosečkách* pochází od Apollónia.[45] Sestává z 8 knih, z nichž první čtyři se dochovali v řečtině, další tři v arabském překladu[46] a poslední byla ztracena.

Z Apollóniových zmínek Eukleida, Conona ze Samu[47] a Nikotela z Kyrenu je zřejmé, že znal práce těchto svých předchůdců a používal je. Knihy I–IV obsahují systematický výklad základních vlastností kuželoseček, které z větší části dříve vyložil už Eukleides, Aristaeus a Menaichmos. Ale zatímco až do Apollónia se tři typy kuželoseček získávaly z různých typů kolmých kruhových kuželů, Apollónios je všechny získává z libovolného kruhového kužele bez ohledu na to, zda je přímý nebo kosý, proto mohl zavést dodnes používané názvy elipsa, hyperbola a parabola. Jeho předchůdci tyto křivky nazývali sečnami ostroúhlého,

[43] Aristaeus (Aristaios) z Elder (370–300 př. Kr.)
[44] Archimedes ze Syrakus (287–212 př. Kr.).
[45] Apollónios z Pergy (260–180 př. Kr.).
[46] Viz [Apo90].
[47] Conon ze Samu (280–220 př. Kr.).

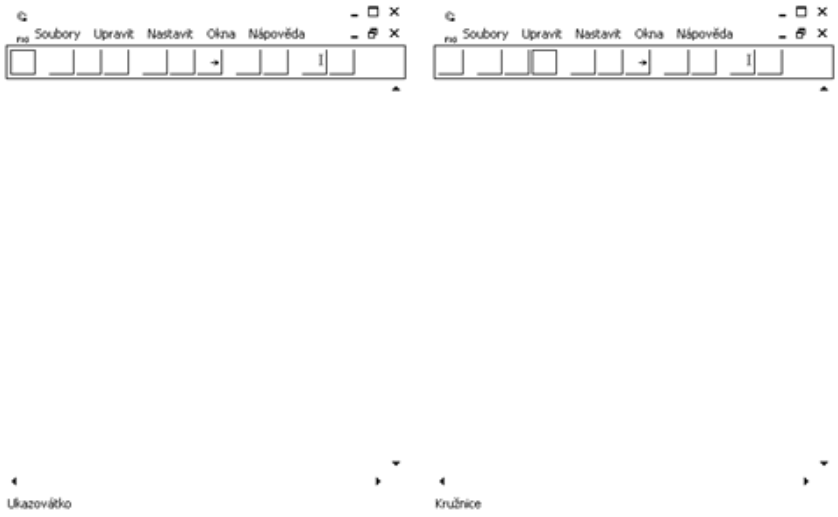


Obrázek 2.8: Ukázka z Apollóniova spisu *O kuželosečkách*, [Tho80a, str. 290]

pravoúhlého a tupoúhlého kužele. Některé věty v knize třetí a velká část knihy čtvrté jsou nové. Knihy V–VII jsou nepochybně originální. Pátá kniha se liší od ostatních jak obsahem, tak i způsobem výkladu a znatelně předstihla svou dobu.[48] Apollónios zde vede ke kuželosečkám z různých bodů normály a zkoumá je jako přímky maximální či minimální. Uvažuje i o bodech, které dnes nazýváme *středy křivosti*, a o evolutách. V šesté knize se zabývá řezy shodnými a podobnými na dvou kolmých podobných kuželích. V sedmé knize zkoumá Apollónios tětivy rovnoběžné se sdruženými průměry. Tato kniha byla přípravou pro ztracenou knihu osmou.

2.2.4. Dioklova Kisoida

Podle úryvků z Dioklovy[49] nedochované práce *O zápalných zrcadlech*, které známe z Eutokiových komentářů k Archimedovu dílu *O kouli a válci*,[50] užil ve 2. stol. př. Kr. Diokles k nalezení dvou středních geometrických úměrných křivku, která dostala název ***kisoida***.[51] Dnes je



(a) Křivka zadaná rovnicí (2.14) (b) Dioklova konstrukce

Obrázek 2.9: Dioklova kisoida v Cabri Geometrii

kisoida většinou definována následovně: Nad průměrem $OP = 2a$ sestro-

[48] Viz [Kol68, str. 165].
[49] Diokles (cca 240–180 př. Kr.), současník Apollónia.
[50] Viz [Tho80a, str. 271].
[51] Z řeckého $\kappa\iota\sigma\sigma o\epsilon\iota\delta\eta\varsigma\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\eta$ – *podobná břečťanu.*

jíme kružnici k a v bodě P její tečnu t (obr. 2.9(a)). Z bodu O vedeme polopřímku p protínající kružnici k. Označme $M = p \cap k$, $N = p \cap t$. Kisoida je potom množina všech bodů $X \in \mapsto\ p$, jejichž vzdálenost od bodu O je rovna $|MN|$. V souřadném systému $\langle O, x, y\rangle$, $x \sim OP$, $y \sim$ tečna ke kružnici v bodě O, má kisoida rovnici

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x} \qquad (0 \le x \le 2a). \tag{2.14}$$

Nyní popišme Dioklovu konstrukci.[52] Uvažujme kružnici $k(S, r = a)$ se dvěma k sobě kolmými průměry GD, ZE (obr. 2.9(b)), v ní dva shodné úhly NSZ, ZSM. Sestrojme $ML \parallel ZS$ a spojme body DN. Označme $T = ML \cap DN$. Bod T leží na křivce jdoucí z bodu D do bodu Z. (Jinou volbou úhlů NSZ, ZSM obdržíme další body. Analogicky zkonstruujeme druhou větev.) Není těžké odvodit z podobnosti trojúhelníků TLD, DLM a MLG, že platí

$$TL : LD = DL : LM = ML : LG, \tag{2.15}$$

tj. při označení $TL = a$, $DL = x$, $ML = y$ a $GL = b$ (ve speciálním případě $b = 2a$) obdržíme známé vztahy pro dvě střední geometrické úměrné. Abychom obdrželi rovnici (2.14), museli bychom zvolit v obrázku 2.9(b) souřadný systém $\langle D, x, y\rangle$, $x \sim GD$, $y \sim ZE$, kde navíc kladný směr osy x odpovídá polopřímce DG. Diokles i další řečtí geometři, kteří se po něm kisoidou zabývali, vyšetřovali pouze část křivky uvnitř kružnice. Jak použil Diokles kisoidu k nalezení veličin x, y k dané veličině a tak, aby byly splněny vztahy (2.6), je uvedeno v tabulce 2.2.

Poznamenejme, že Dioklova kisoida patří z dnešního pohledu mezi algebraické křivky třetího stupně a zabývali se jí zejména učenci sedmnáctého století (viz str. 135).

2.2.5. Nikomedova konchoida

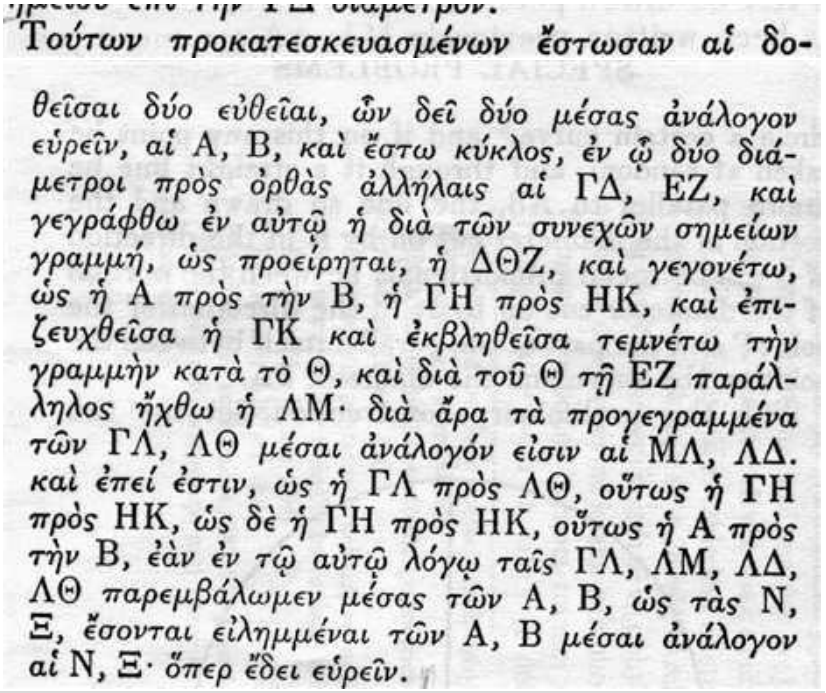
V Eutokiových komentářích Archimedova díla *O kouli a válci*[53] se dovídáme, že Nikomedes[54] ve své knize *O konchoidách* ke stanovení dvou středních geometrických úměrných užil křivku, kterou sám popsal. Původně křivku pravděpodobně nazval ***kochloida***,[55] tak ji nazývá Pappos

[52] Podle Eutokia v [Tho80a, 271]. Kolman bez odkazu na zdroj zavádí kisoidu způsobem popsaným výše [Kol68, 162].

[53] Viz [Tho80a, 296].

[54] Nikomedes (2. stol. př. Kr.).

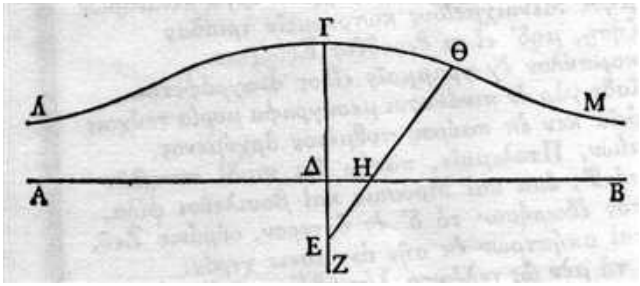
[55] Kochloida – tvaru kochlei (druh ryby, řecky κοξλος).



Τούτων προκατεσκευασμένων ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, αἱ Α, Β, καὶ ἔστω κύκλος, ἐν ᾧ δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΓΔ, ΕΖ, καὶ γεγράφθω ἐν αὐτῷ ἡ διὰ τῶν συνεχῶν σημείων γραμμή, ὡς προείρηται, ἡ ΔΘΖ, καὶ γεγονέτω, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΚ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΚ καὶ ἐκβληθεῖσα τεμνέτω τὴν γραμμὴν κατὰ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Θ τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΜ· διὰ ἄρα τὰ προγεγραμμένα τῶν ΓΛ, ΛΘ μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΜΛ, ΛΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΓΛ πρὸς ΛΘ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΚ, ὡς δὲ ἡ ΓΗ πρὸς ΗΚ, οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Β, ἐὰν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ταῖς ΓΛ, ΛΜ, ΛΔ, ΛΘ παρεμβάλωμεν μέσας τῶν Α, Β, ὡς τὰς Ν, Ξ, ἔσονται εἰλημμέναι τῶν Α, Β μέσαι ἀνάλογον αἱ Ν, Ξ· ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

Na základě připravené konstrukce, nechť dvě úsečky, mezi kterými je požadováno najít dvě střední úměrné, jsou A, B, a nechť je dána kružnice, ve které ΓΔ, EZ jsou dva průměry vzájemně k sobě kolmé, nechť je sestrojena křivka ΔΘZ výše popsaným způsobem a nechť A : B = ΓH : HK, a nechť ΓK jsou spojeny, a nechť přímka je spojující je prodloužena dokud neprotne křivku v Θ, a skrze Θ, nechť ΔM je sestrojena rovnoběžně k EZ; potom podle toho, co bylo napsáno v předchozím MΛ, ΛΔ jsou střední geometrické úměrné mezi ΓΛ, ΛΘ. A odtud ΓΛ : ΛΘ = ΓH : HK a ΓH : HK = A : B, jestliže mezi A, B umístíme N, Ξ se stejným poměrem jako ΓΛ, ΛM, ΛΔ, ΛΘ (tj. jestliže vezmeme ΓΛ : ΛM = A : N, $\Lambda M : \Lambda\Delta = N : \Xi$ a ΛΔ : ΛΘ = Ξ : B), potom N, Ξ budou střední geometrické úměrné mezi A, B, které měly být nalezeny.

Tabulka 2.3: Nalezení dvou středních geometrických úměrných užitím Dioklovy kisoidy podle Eutokia (úryvek Dioklova díla *O zápalných zrcadlech* v Eutokiových komentářích Archimedova díla *O kouli a válci* podle Thomase [Tho80a, 276]).



Obrázek 2.10: Nikomedova konstrukce konchoidy, [Tho80a, str. 299]

(3. stol.). Teprve později dostala zřejmě název ***konchoida***[56] – Proklos (5. stol.). Nikomedes sestrojil tuto křivku zvláštním přístrojem, který sám vynalezl. Od Eutokia se dovídáme, že Nikomedes se svým objevem velice pyšnil a vysmíval se Eratostenovu objevu jako nepraktickému a pro geometrii nevhodnému.[57]

Popišme velice stručně Nikomedovu konstrukci. Uvažujme dvě navzájem kolmé úsečky AB, GZ, jejich průsečích označme D (obr. 2.10). Nechť bod E leží mezi body ZD a úsečka GZ se pohybuje tak, že je upevněna v bodě E, stále protíná úsečku AB a vzdálenost DG se zachovává, tj. délka DG na obr. 2.10 je ekvivalentní délce HT. Potom bod G opíše křivku LGM. Nikomedes dokázal, že mezi všemi úsečkami kolmými k LGM, jejichž krajní body budou ležet na LGM a AB, je nejdelší právě úsečka DG z obr. 2.10. Kromě Nikomeda ukazuje použití konchoidy pro nalezení dvou středních geometrických úměrných také sám Pappos, obdobně i Eutokios.[58] Konchoida byla také užívána k trisekci úhlu.[59] V 17. století její konstrukci znovu popisuje Descartes (viz str. 117.)

Z dnešního pohledu je Nikomedova konchoida algebraická křivka čtvrtého stupně, tj. množina všech bodů $X = [x, y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici

$$(x - a)^2 \cdot (x^2 + y^2) - b^2 x^2 = 0. \tag{2.16}$$

Pod pojmem *konchoidy* se dnes rozumí obecnější křivky, které se dostanou zmenšením nebo zvětšením průvodiče každého bodu dané křivky, nikoliv nutně přímky jako je tomu v případě Nikomedovy konchoidy.

[56] Konchoida – tvaru škeble.

[57] Eratostenes určil dvě střední geometrické úměrné rovněž mechanicky pomocí přístroje zvaného „mezolabon“ [Kol68, str. 160].

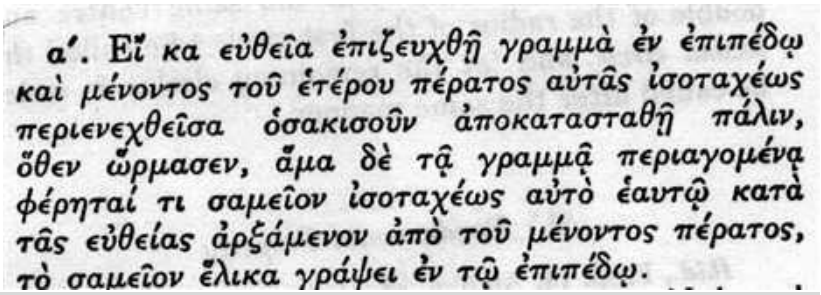
[58] Podrobněji v [Tho80a, str. 304].

[59] Podrobněji v [Tho80a, str. 301].

2.2.6. Archimedova spirála

Archimedes ze Syrakus byl člověkem, který své znalosti užíval v praxi.[60] Z hlediska našeho zájmu o křivky upoutá mezi jeho zachovanými pracemi spis *Kvadratura paraboly*. Archimedes zde ještě používá pro parabolu název „řez pravoúhlého kužele“. Stanovuje velikost plochy parabolické výseče vyťaté tětivou. Práce je nesmírně zajímavá pro historii matematické analýzy svojí metodou příbuznou metodě výpočtu určitého integrálu. K tématu křivek však nepřináší nic.

O to zajímavější je vzhledem ke stanovenému tématu Archimédova pozdější práce *O spirálách*. Skládá se z 28 vět. Archimedés zde podává definici spirály jako čáry opisované bodem rovnoměrně se pohybujícím po přímce, zatímco se tato přímka rovnoměrně otáčí v rovině kolem jednoho pevného bodu, který na ní leží (viz tab. 2.3). V dnešní symbolice



α'. Εἰ κα εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ καὶ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος αὐτᾶς ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ὁσακισοῦν ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιαγομένᾳ φέρηταί τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαμεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

1. Jestliže se úsečka v rovině otáčí rovnoměrně za libovolný čas kolem pevně zafixovaného krajního bodu dokud nedojde do výchozí pozice, a jestliže se, současně s otáčením, rovnoměrně pohybuje bod od zafixovaného konce podél této úsečky, pak tento bod opisuje ***spirálu*** v rovině.

Tabulka 2.4: Archimedova definice spirály podle Thomase [Tho80b, str. 182]).

bychom rovnici Archimedovy spirály v polárních souřadnicích vyjádřili jako $r = a \cdot t$, kde r je délka průvodiče a t příslušný úhel. Archimedes používá v geometrii pohyb, ale jen k definici nových geometrických objektů nikoliv k důkazům.[61] Archimedes mimo jiné ukazuje (obr. 2.11), že

[60] Celé jeho dílo podporuje můj názor na tendence vývoje matematiky v helénistickém období (viz strana 35).

[61] V roce 1899 byl objeven pergamen z 10. století, který byl částečně ve 13. století smyt a přepsán náboženským textem [Kat98, 111]. Heiberg jej prozkoumal a následně vydal v roce 1906. V tomto pojednání nazvaném *O metodě* Archimedes vysvětluje,

délka polární subtangenty OT (tj. úseku na kolmici OT k průvodiči OP, ležícím mezi pólem O a tečnou PT) je rovna délce kruhového oblouku AP.[62]

Polární osu spirály OA Archimedes nazývá $\alpha\rho\chi\alpha\ \tau\eta\varsigma\ \pi\epsilon\rho\iota\varphi o\rho\alpha\varsigma$[63] – počáteční [čára] pohybu. Kolman bez konkrétního odkazu uvádí „základní čára“.[64] Tím je možno užít Archimedovu spirálu k rektifikaci kružnice. Dále ukazuje Archimedes také např. výpočet obsahu plochy, kterou křivka opisuje atd.



Obrázek 2.11: Archimedova spirála

jak došel k některým větám:
Mnohé, co jsem dříve objasnil „mechanicky“, jsem potom dokázal geometricky, neboť moje úvahy založené na této mechanické metodě neměly ještě průkaznosti důkazů, lehčí je ovšem najít důkazy, když si mechanickou metodou vytvoříme představu o zkoumané otázce, než to udělat bez takových předběžných představ. Viz [Kli14, str. 414].

[62] Viz [Kol68, str. 151].

[63] Viz [Tho80b, str. 182]

[64] Viz [Kol68, str. 151].

2.2.7. Spirály ionských sloupů

Antická architektura upoutá křivkami ve tvaru spirály a to zejména na hlavicích ionských sloupů. Na závěr se o nich zmíníme. V díle Vitruviově[65] *Deset knih o architektuře* [Vit79] jsou detailně popsány poměry všech částí chrámu i postupy při stavbě. Mimo jiné popisuje Vitruvius také konstrukci hlavice iónského sloupu. Spirálovité zakončení je kon-



Obrázek 2.12: Hlavice iónských sloupů se zakončeními ve tvaru spirály, Muzeum v Dionu [*foto autorka*]

struováno pomocí kružnicových oblouků. Zejména v období renesance se objevují první snahy tyto prvky rekonstruovat, tj. také zopakovat potřebné konstrukce, ale Vitruviův popis je neúplný:

Od přímky spuštěné podél okraje abaku má ustupovati dovnitř druhá ve vzdálenosti $1\frac{1}{2}$ *dílu. Tyto rovnoběžky se rozdělí tak, že se pod abakem naměří* $4\frac{1}{2}$ *dílu. Pak se v bodě, jenž odděluje od sebe* $4\frac{1}{2}$ *dílu a* $3\frac{1}{2}$ *dílu umístí střed volutového oka [oculus]. Z něho se opíše kružnice o průměru rovném jednomu z těchto 8 dílů. Tato kružnice je stejně velká jako oko. Nato se započte odshora pod abakem s nákresem voluty, který se průběhem jednotlivými čtvrtúseky zužuje o polovinu průměru oka, dokud se nedojde zase k témuž čtvrtúseku (k témuž provodiči) pod abakem.* [Vit79, str. 68]

Vitruvius zde opouští další návod ke kreslení voluty. Podle poznámek k překladu Vitruvia je nejužívanější rekonstrukční postup tento:

[65] Vitruvius Pollio Marcus (cca 90–20 př. Kr.), významný architekt a stavitel Julia Caesara a Augusta.

V oku voluty se vepíše čtverec postavený na roh. Jeho strany se rozpůlí a spojí dělícími přímkami. Každá polovina dělící přímky se rozdělí na 3 díly. Body, rozdělující strany čtverce a body, rozdělující dělící přímky na třetiny, jsou středy protilehlých čtvrtkruhů (úseků voluty). Započne se s největším čtvrtúsekem voluty na provodiči pod abakem z nejvzdáleněj-šího středu v protilehlé levé horní čvrtině oka a voluta se vede k pravému provodiči vodorovnému až do plynulého spojení s čtvrtúsekem voluty, který bude veden od vodorovného tohoto provodiče ze středu, který půlí horní pravou stranu čtverce vepsaného do volutového oka. Ze všech půlících bodů ve stranách vepsaného čtverce se takto postupně vede voluta až zase ke kolmému provodiči pod abakem. Pak se ustoupí na středy v první třetině půlících přímek ve čtverci a vede se druhá spirála, stejně tak i další až do splynutí voluty s volutovým okem, při čemž se takto uplatní všechny středy shora uvedené. Na každém dalším provodiči pro-bíhá voluta bodem, který je o polovinu průměru oka méně vzdálen od středu oka než byl na provodiči předchozím. [Vit79, str. 68]

Sám překladatel píše, že tento postup nevyhovuje všem iónským hlavicím, ale co je podstatnější, tento postup nevyhovuje ani uvedenému obrázku. Ověříme-li popsanou konstrukci výpočtem, zjistíme, že poslední oblouk se volutového oka nedotýká.[66] Poznamenejme na závěr, že Vitruviova konstrukce nápadně připomíná tzv. ***zlatou spirálu***. Její konstrukce je zřejmá z obrázku 2.14: v obdélníku, jehož strany a, b jsou v poměru zlatého řezu, oddělíme čtverec a^2 a do něj vepíšeme čtvrtkružnici. Snadno lze ukázat, že zbývající obdélník má strany opět v poměru zlatého řezu. Konstrukci v něm zopakujeme atd.

2.2.8. Prostorové křivky

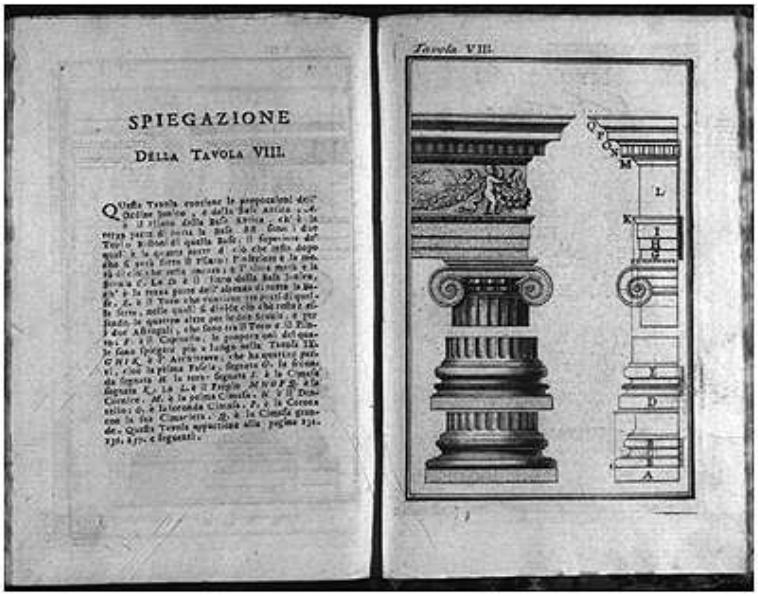
Už během předchozích úvah jsme si mohli všimnout, že prostorové představy nebyly starověkým geometrům nijak cizí (kuželosečky jako řezy na kuželi, Diokles podává řešení jedné Archimédovy úlohy, kdy uvažoval průsečík rovnoosé hyperboly s elipsoidem[67] apod.)

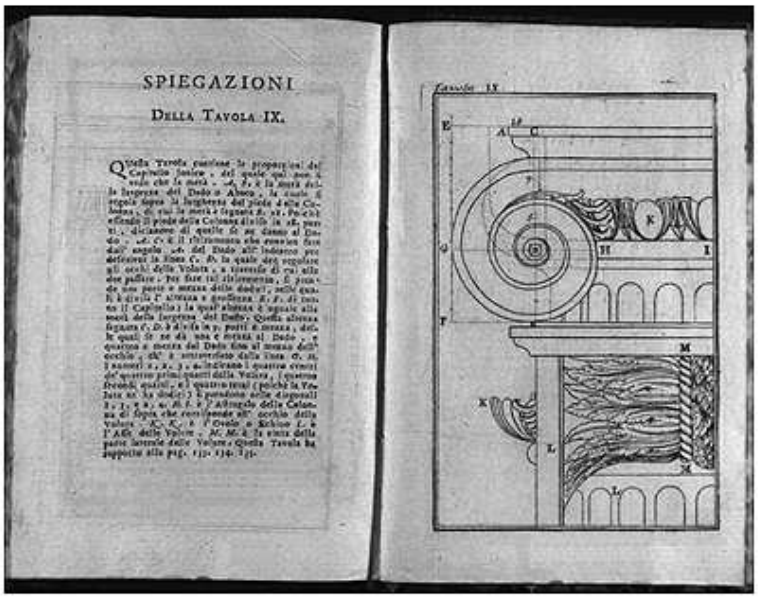
Uveďme na tomto místě ještě jeden zajímavý způsob nalezení veličin x, y k dané veličině a tak, aby byly splněny vztahy (2.6). Podle Eutokiových komentářů k Archimedovu dílu *O kouli a válci* podal toto řešení v 1. pol. 4. století př. Kr. Archytas z Tarentu.[68] Pravděpodobně si uvědomil, že nalezení veličin x, y k dané veličině a, tak aby platily vztahy

[66] Podrobněji je tato otázka rozebrána v [Kač03, str. 13].

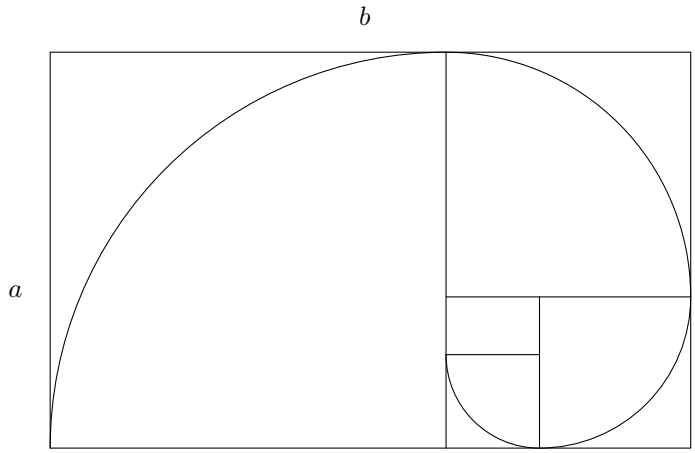
[67] Viz např. [Kol68, 162].

[68] Archytas z Tarentu (428–365 př. Kr.), pythagorejský filozof, přítel Platonův a učitel Eudoxův.





Obrázek 2.13: Vitruviův spis *Deset knih o architektuře*, italské vydání z 18. stol.



Obrázek 2.14: Zlatá spirála vepsaná do obdélníka, jehož strany jsou v poměru zlatého řezu, tj. platí $\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a}$.

(2.6), odpovídá sestrojení trojúhelníku na obr. 2.15(a), tj.

$$a : x = x : y = y : 2a$$

při označní

$$a = OL,\ x = OP_1,\ y = OP,\ 2a = OD'\,.$$

Tento trojúhelník určil pomocí průniku tří rotačních ploch: rotační válcové plochy, rotační kuželové plochy a axoidu (anuloidu s nulovým vnitřním průměrem). Popišme jeho zajímavou a na představivost poměrně náročnou úvahu.

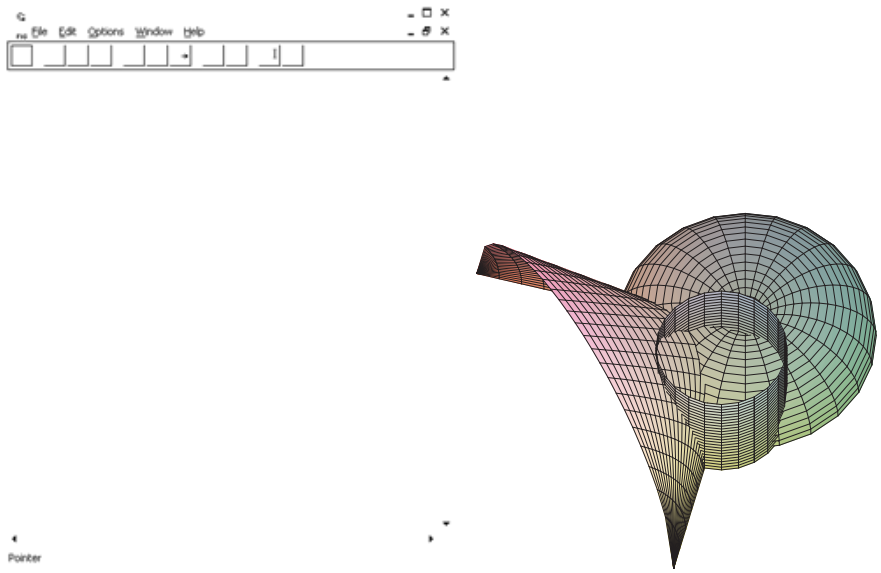
Uvažujme tři rotační plochy

(1) rotační válcovou plochu $\mathcal{V}$ s řídící kružnicí v o průměru $OD = 2a$,

(2) rotační kuželovou plochu $\mathcal{K}$ s osou rotace OD, která vznikla rotací úhlu QOD, $|\sphericalangle QOD| = 60°$,

(3) axoid $\mathcal{A}$, který vznikl rotací kružnice a o průměru $OD = 2a$, ležící v rovině kolmé na rovinu kružnice v, kolem površky válce procházející bodem O (tj. rovina kružnice a je kolmá na rovinu kružnice v).

Situaci znázorňuje obr. 2.15(b). Uvažujme rovinu π, ve které bude ležet řídící kružnice v válcové plochy $\mathcal{V}$ a osa OD kuželové plochy $\mathcal{K}$. Potom budou ležet v rovině π dvě površky k_1, k_2 rotační kuželové plochy $\mathcal{K}$ a obrysová kružnice b axoidu $\mathcal{A}$, kterou opsal bod D při rotaci kružnice



(a) (b)

Obrázek 2.15: Archytovo prostorové řešení

a. Vzhledem k souměrnosti budeme dále uvažovat jen jednu čtvrtinu prostoru ohraničenou rovinou π a rovinou kolmou k π procházející OD. Označme $K = k_1 \cap v$. Všechny tři plochy se v tomto „čtvrtprostoru“ kromě bodu O protnou v bodě P, jeho kolmým průmětem do roviny π je bod P_1. Uvažujme dále rovinu ν, která je kolmá k π, obsahuje průsečík ploch P a bod O. V této rovině se axoid $\mathcal{A}$ zobrazí jako kružnice a', která vznikla rotací kružnice a, kužel se zobrazí jako površka l a válec jako površky u_1, u_2. Bod K, který tvořil průsečík površky k_1 s válcem, přešel do bodu L na površce l. Kolmým průmětem bodu L do roviny π je bod L_1. V rovině ν leží hledaný trojúhelník (obr. 2.15(a)), ve kterém platí

$$\frac{OL}{OP_1} = \frac{OP_1}{OP} = \frac{OP}{OD'} \tag{2.17}$$

tj. platí požadované vztahy (2.6). Archytas řešil úlohu obecněji pro nalezení dvou středních geometrických úměrných x, y k daným veličinám a, b. Speciálního případu $b = 2a$ je dosaženo podmínkou $|\sphericalangle QOD| = 60°$.

Z pohledu 1. pol. 4. stol. př. Kr. se jedná o pozoruhodný výsledek. Analyticky bychom ho vyjádřili poměrně snadno.

Archytovo řešení ukazuje, že práce s třírozměrnými objekty nebyla již v 1. pol. 4. století př. Kr. řeckým geometrům cizí. Sarton uvádí, že

jde o první příklad v historii, kdy byla užita křivka s dvojí křivostí.[69] Má tím na mysli křivku, která je dána průnikem válce a anuloidu a která pak v průniku s rotačním kuželem dává požadované řešení. Ačkoliv z dnešního pohledu jde skutečně o křivku s dvojí křivostí, domnívám se, že Archytas se pravděpodobně zajímal výhradně o nalezení geometrických úměrných a průnikovým křivkám uvažovaných těles nevěnoval pozornost.

Žák Archyta z Tarentu, Eudoxos z Knidu,[70] se pokoušel vytvořit teorii planetárních pohybů. Přitom vyšetřoval valení válcové plochy podél hlavní kružnice plochy kulové. Došel k prostorové křivce vznikající jako průnik plochy kulové s válcovou rotační plochou, které mají společnou tečnou rovinu je neoddělující, nazýval ji ***hypopeda***. indexhypopeda

Z arabských pramenů se dozvídáme, že speciálnímu případu této křivky, který dnes známe pod názvem *Vivianiho křivka*,[71] se na konci 1. stol. po Kr. zabýval Menelaos.[72] Průměr rotační válcové plochy je v tomto případě roven poloměru kulové plochy. Údajně tuto křivku Menelaos nazýval ***paradoxní křivka*** a řešil s její pomocí problém zdvojení krychle ve ztraceném díle *Základy geometrie*.[73]

Šroubovici na válcové ploše znali už Apollónios z Pergy, Geminos[74] a Pappos.

Kónická spirála vzniká průnikem rotační kuželové plochy z válcovou plochou, jejíž řídící křivka je Archimedova spirála a jejíž povrchové přímky jsou kolmé k rovině řídící křivky, a to v té vzájemné poloze, kdy povrchová přímka válcové plochy jdoucí pólem spirály splývá s osou kuželové plochy. Zabýval se jí už Pappos.

Připomeňme ještě jedno dílo Eukleidovo, které nám zřejmě mohlo mnoho vypovědět o křivkách z pohledu oné doby, ale taktéž je ztraceno – *Místa na ploše*.

[69] *Archytas determined these two mean proportionals by means of the intersection of three surfaces of revolution. The intersection of two of these, a cylinder and a tore (or anchor ring) with inner diameter zero, is a curve of double curvature. The point where that curve pierces the third surface, a right cone, gives solution. This is the first example in history of the use of a curve of double curvature.* Viz [Sar93, str. 440].

[70] Eudoxos z Knidu (480–355 př. Kr.), významný matematik a astronom, tvůrce teorie proporcí, přímý předchůdce Eukleidův.

[71] Vincenzo Viviani(1622–1703).

[72] Menelaos z Alexandrie (70–130 po Kr.). V arabštině se dochoval jeho spis *Sfériky*, který obsahuje poprvé v historii pojem sférického trojúhelníka.

[73] Viz [Tho80a, str. 350].

[74] Geminos z Rhodu (1. stol. př. Kr.).

Není jasné zda bylo věnováno křivkám (kuželosečkám nebo třeba i spirálám) na ploše kužele a válce, nebo rotačním plochám, či obojí problematice. [Kol68, str. 141]

Minimálně však můžeme považovat tuto ztracenou práci, o které se zmiňuje Pappos i Proklos, za další důkaz toho, že Řekové se již ve 4. století př. Kr. zabývali netriviálními prostorovými úvahami

2.2.9. Křivky v posledním období antiky

Pappos, učitel matematiky a astronomie v Alexandrii, věděl, že žije v době úpadku[75] a tak studoval, opisoval a komentoval spisy řeckých učenců „Zlaté éry". Tím už tehdy připomínal skoro zapomenuté klasické matematické znalosti.[76] Díky jeho souboru prací, který je dnes znám pod názvem *Sbírka (Synagoge)*, víme o některých starých řeckých spisech, jež se nezachovaly. Také mnoho aspektů řecké matematiky dnes známe díky Pappovi. Sbírku tvoří osm knih, které byly patrně sepsány jako průvodce studia klasickými řeckými spisy a měly být čteny společně s nimi. Pappos v komentářích doplnil řadu historických poznámek, vlastních myšlenek a postupů. Zdá se, že každá kniha *Sbírky* byla psána jako oddělené pojednání; každá má vlastní úvod a odlišné téma. Vzhledem k našemu tématu je nejzajímavější kniha IV, která pojednává o vlastnostech křivek včetně Archimedovy spirály a Hippiovy kvadratrix. Pappos pojednává o různých typech křivek – můžeme říci, že zde máme první snahu o klasifikaci křivek:

Úlohy geometrie jsou trojího typu: některé se nazývají rovinné, některé tělesové a některé křivkové, ty, které je možno vyřešit pomocí přímek a kružnic, nazýváme rovinné, neboť přímky, pomocí kterých tyto problémy řešíme, mají svůj původ v rovině. Avšak ty problémy, k jejichž řešení užíváme jedné nebo více kuželoseček [řezů kužele]*, se nazývají tělesové, neboť při konstrukci je potřeba používat plochy pevných těles, mám na mysli kuželových ploch. Zbývá nám třetí druh problému, tj. křivkové, neboť kromě již zmíněných křivek používáme ke konstrukci jiné křivky, které mají komplikovanější a méně přirozený původ, protože jsou generovány z nepravidelných ploch a spletitých pohybů. Mnohé další složitější byly objeveny Demetriem z Alexandrie v jeho Úvahách o křivkách a Phi-*

[75] *Pappus knew he lived in a period of decline and his reverence for the "ancients" is matched by his disdain for his contemporaries.* Viz [Gra94, str. 65].

[76] Viz [Kol68, 191].

lonem z Thyany[77] *jako výsledky vnitřního proplétání ploch všech druhů a vykazují řadu úžasných vlastností.* [...] *Další křivky tohoto druhu jsou spirály, kvadratrix, konchoidy a kisoidy.* [Tho80a, str.347–350]

Z Pappova textu je patrné, že mnohé znalosti o křivkách se nám ze starověku bohužel nedochovaly.

Komentování klasických spisů bylo v té době hlavní náplní učenců, nové práce vznikaly ojediněle a byly to spíše kompiláty – např. Serenus napsal dvě krátká kompilovaná pojednání *O řezu válce* a *O řezu kužele*. Z mnoha komentátorů ještě připomeňme alespoň Theona z Alexandrie, který komentoval *Základy* a *Almagest*.

V prvním období Byzantské říše se pěstovala matematika v Athénské a Alexandrijské škole. Vynikající komentátor řeckých klasiků Proklos vedl až do své smrti Athénskou akademii a jeho žák Ammonios vedl až do své smrti roku 515 Alexandrijskou školu. Žákem Ammonia byl významný komentátor Apollóniova spisu *O kuželosečkách* Eutokios z Askalónu. Z jeho komentářů k první knize Eukleidových základů se dozvídáme i mnohé historické údaje.[78]

2.3. Přínos antiky k teorii křivek

Nejjednodušší křivky – ***přímka*** a ***kružnice***, geometrické objekty z nich vytvořené, jejich vlastnosti a vzájemné vztahy byly předmětem zájmu všech starověkých geometrů. Dnes to dosvědčují v geometrii běžně užívané termíny – např. Thaletova kružnice, Thaletova věta, Pythagorova věta, Hippokratovy měsíčky, věty Eukleidovy, Apollóniovy úlohy apod. Mnohé bylo už ve 3. stol. př. Kr. zahrnuto do axiomaticky budovaných Eukleidových *Základů*, ale převedením kružnice na část přímky (úsečku) stejné délky – tzv. rektifikací kružnice – pomocí pravítka a kružítka se zabývalo mnoho starověkých geometrů bez úspěchu (viz poznámka na straně 40).

Kromě přímky a kružnice byly ve starověku (během zhruba tisíce let) popsány některé speciální křivky – ***Hippiova kvadratrix, parabola, hyperbola, elipsa, Nikomedova konchoida, Dioklova kisoida, Archimedova spirála*** a několik málo křivek prostorových

[77] Bohužel nic dalšího o těchto autorech není známo. Pouze Demetria zmiňuje Dyogenes Laertius jako filozofa–cynika, který žil kolem roku 300 př. Kr. Viz [Tho80a, str. 349].

[78] Morrow, G. R.: *Proclus. A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, Princeton University Press.

(viz odstavec 2.2.8). Na první pohled by se mohlo zdát zarážející, že nebyly popsány žádné poměrně jednoduché (z našeho dnešního pohledu) křivky jako je např. kubická parabola, ale na druhé straně byla objevena transcendentní kvadratrix a jiné složitější křivky. Navíc až na kuželosečky byly velmi málo vyšetřovány vlastnosti objevených křivek. Z dnešního pohledu je překvapivý i fakt, že Řekové popisovali (v převážné většině případů) jen část toho, co pod těmito křivkami vidíme v dnešní době – např. část Hippiovy kvadratrix uvnitř čtverce, část Dioklovy kisoidy uvnitř kružnice apod. Tuto konečnou část chápali jako jeden objekt nikoliv jako nekonečnou množinu bodů, kterou těmito křivkami rozumíme dnes.

Zvláštní postavení mezi popsanými křivkami zaujímají elipsa, hyperbola a parabola, u nichž došlo k jistému zobecnění – všechny byly popsány jako řezy na kuželi a byla vybudována teorie kuželoseček završená dílem Apollónia (str. 50). Téměř dva tisíce let se nedostalo teorii kuželoseček žádného dalšího rozpracování ani odezvy v praxi (viz str. 118). Podle dochovaných pramenů k pokusům o zobecnění u jiných křivek či dokonce k úvahám o pojmu křivka jako takovém nedošlo, ačkoliv pojmová logika byla zvláště v některých školách velmi pěstovaná. Jediná věta pozoruhodně obecného charakteru se vyskytuje v Eukleidových *Základech*

2. Čára pak délka bez šířky. [Ser07, str. 1]

Tato věta, jak jsme ukázali v odstavci 2.2.1, může být považována za první obecnou definici křivky a ještě se k ní budeme vracet.

Pokusme se nyní objasnit charakteristiky studia křivek v období antiky. V předcházejících odstavcích této kapitoly jsme mimo jiné popsali podněty, které vedly k objevení téměř všech speciálních křivek ve starověku. Tímto společným podnětem byla snaha najít řešení některého ze tří proslulých problémů (str. 40). Omezená část, kterou starověcí geometři popisovali, byla pak postačující k dosažení cíle – k řešení daného problému. Dále si musíme uvědomit, že se starověkým učencům nepodařilo vyjádřit v logice pojmů rozpor mezi pohybem, prostorem a časem, na který narazil Zenon už v 5. stol. př. Kr. (str. 38), tj. v době, kdy byla popsána první známá křivka po kružnici a přímce – Hippiova kvadratrix. Snažili se proto v precizně budované geometrii pohybu vyhýbat. Je zřejmé, že tato skutečnost příliš nepodporovala studium křivek, z nichž mnoho, jak jsme ukázali, bylo konstruováno právě mechanicky – na základě pohybu a nebylo možno je sestrojit euklidovkou konstrukcí. To bylo s největší pravděpodobností také důvodem, proč nebyla teorie

kuželoseček zařazena do Eukleidových *Základů*, ačkoliv byla v té době již bezesporu rozpracována. I když někteří s pohybem „pracují“ (např. Archimedes, definice spirály pomocí pohybu apod.), ostré kritiky mechanických úvah v geometrii se objevují po celé období antiky (např. Sporus kritizoval ve 3. stol. po Kr. Hippiovu kvadratrix – str. 47 apod.) Podobný postoj jako k pohybu zaujímali i k nekonečnu. V neposlední řadě jejich představa křivky odpovídá jejich pojetí všech geometrických objektů (viz str. 38).

Tomuto přístupu odpovídá i rozdělení křivek na geometrické a mechanické, které kritizoval až Descartes v 17. století (viz str. 113).

Ačkoliv během starověku nedošlo k žádnému systematickému zkoumání křivek, jednotlivě popisované křivky a zejména teorie kuželoseček se staly základem pro obrození geometrie v době renesance. Především z těchto poznatků vycházejí kořeny Descartovy geometrie a následného expanzivního studia křivek v 17. století.

Na závěr shrneme hlavní aspekty studia křivek ve starověku do několika bodů (viz tabulka 2.4) a v dalších kapitolách budeme sledovat, jak se tyto charakteristiky budou během vývoje měnit.

1. Snaha najít řešení některého ze tří proslulých starověkých problémů je (téměř) jediným podnětem, který vedl k objevení křivek.
2. Popisována většinou jen část křivky.
3. Navzdory vysoké úrovni geometrických znalostí systematicky vyšetřovány vlastnosti křivek jen u přímky a kružnice (později u kuželoseček – Apollónios).
4. Z geometrických úvah o křivkách dlouho vylučován pohyb.
5. Křivky chápány (až na výjimky) jako konečné objekty nikoliv jako nekonečné množiny bodů.
6. Až na teorii kuželoseček nevytvořeno žádné zobecnění.

Tabulka 2.5: Hlavní charakteristiky studia křivek během starověku

Literatura

[Apo90] Apollónius z Pergy. *Apollonius Conics Books V to VII (The Arabic Translation of the Lost Greek Original in the Version of the Banú Músa).* Springer-Verlag, New York, 1990. (překlad a komentáře G. J. Toomer).

[Beč01] Bečvář, J. a kol. *Matematika ve středověké Evropě*, svazek 19 v *Dějiny matematiky.* Prometheus, Praha, 2001.

[Beč02] Bečvářová, M. *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady*, svazek 20 v *Dějiny matematiky.* Prometheus, Praha, 2002.

[Des37] Descartes, R. *The geometry of Rene Descartes.* Leiden, 1637. (z francouzštiny a latiny přeložil do angličtiny David Eugene Smith a Marcia L. Latham, Chicago 1925; přetisk: Dover Publications, New York, 1954).

[Far50] Farrington, B. *Věda ve starém Řecku a její význam pro nás I. Od Thaleta k Aristotelovi.* Rovnost, Praha, 1950.

[Fuc93] Fuchs, E.–Bečvář, J., ed. *Historie matematiky I*, svazek 1 v *Dějiny matematiky.* JČMF, Praha, 1993.

[Gel04] Geldard, R. G. *Esoterické Řecko.* Eminent, Praha, 2004. (překlad Souček J.).

[Gra94] Grattan–Guinness, I., ed. *Companion Encyklopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences.* Routledge, London, 1994.

[Hei33] Heidel, W. A. *The Heroic Age of Science.* Washington, 1933.

[Hra98] Hradečný, P.–Dostálová, R. *Dějiny Řecka.* Lidové noviny, 1998.

[Kat98] Katz, V. J. *A history of mathematics: an introduction.* Addison-Wesley Educational Publishers, Inc., 2. vydání, 1998.

[Kli14] Kliem, F. *Archimedes' Werke.* Berlin, 1914.

[Kač03] Kočandrlová, M. O kružnici. *Učitel matematiky*, 1, 10–16, 2003.

[Kol68] Kolman, A. *Dějiny matematiky ve starověku.* Academia, Praha, 1968.

[Neu49] Neugebauer, O. The astronomical origin of the theory of conic section. *Isis*, 40, 124, 1949.

[Pla93] Platon. *Ústava*, svazek 65 v *Antická knihovna.* Svoboda – Libertas, Praha, 1993. (přeložil Radislav Hošek, 1990).

[Sar93] Sarton, G. *Ancient Science Through The Golden Age Of Greece.* Dover Publications, Inc., New York, 1993. 1. vydání 1952, The Harvard University Press, Cambridge.

[Ser07] Servít, F. *Eukleidovy Základy (Elementa).* Nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1907.

[Str63] Struik, D. J. *Dějiny matematiky.* Praha, 1963. (z angl. originálu A Concise History of Mathematics, G. Bell and Sons Ltd., London, 1956, přeložili Nový, L.-Folta, J.).

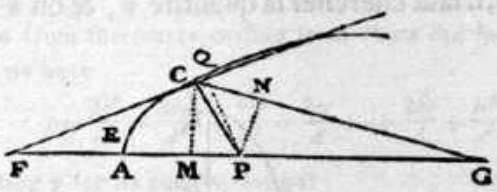
[Tho80a] Thomas, I. *Greek Mathematics (From Thales To Euclid)*, svazek 1. Harvard University Press, London, 1939 (reprinted 1951, 1957, 1968, 1980).

[Tho80b] Thomas, I. *Greek Mathematics (From Aristarchus to Pappus)*, svazek 2. Harvard University Press, London, 1941 (reprinted 1951, 1957, 1968, 1980).

[Vit79] Vitruvius. *Deset knih o architektuře.* Svoboda, Praha, 1979.

[Vop89] Vopěnka, P. *Rozpravy s geometrií.* Academia, Praha, 1989.

$\zeta\zeta \frac{\mp 2bcdd\zeta - 2bcde\zeta - 2cddv\zeta - 2bdev\zeta - bdd\zeta\zeta \pm bddvv}{bdd + cee + cev} \frac{- cdd\zeta\zeta \pm cddvv}{- dd v}$ a la meſme forme que $\zeta\zeta - 2f\zeta + ff$, en ſuppoſant f eſgal a ζ, ſi bienque il y a derechef equation entre $-2f$, ou -2ζ, & $\frac{\mp 2bcdd - 2bcde - 2cddv - 2bdev}{bdd + cee + cev - dd v}$ d'où ou connoiſt que la quantité v eſt $\frac{bcdd - bcde \pm bddz \pm ceez}{cdd \pm bde - eez \pm dd\zeta}$



C'eſt pourquoy compoſant la ligne A P, de cete ſomme eſgale à v dont toutes les quantités ſont connuës, & tirant du point P ainſi trouué, vne ligne droite vers C, elle y couppe la courbe C E a angles droits. qui eſt ce qu'il falloit faire. Et ie ne voy rien qui empeſche, qu'on n'eſtende ce probleſme en meſme façon a toutes les lignes courbes, qui tombent ſous quelque calcul Geometrique.

Meſme il eſt a remarquer touchant la derniere ſomme, qu'on prent a diſcretion, pour remplir le nombre des dimenſions de l'autre ſomme, lorſqu'il y en manque, comme nous auons pris tantoſt $y^4 + fy^3 + gg\,yy + h^3 y + k^4$; que les ſignes + & - y peuuent eſtre ſuppoſés tels, qu'on veut, ſans que la ligne v, ou A P, ſe trouue diuerſe pour cela, comme vous pourrés ayſement voir par experience. car s'il falloit que ie m'areſtaſſe a demonſtrer tous les theoreſmes dont ie fais

Obrázek 3.1: Ukázka z Descartovy *La Géométrie* z roku 1637, [Des37]

Kapitola 3

Od antiky k analytické geometrii

> *Následující století jsou v matematice obdobím hlubokého úpad-ku, po kterém posléze přichází postupné shromažďování a osvojování si ztracených poznatků, objevování a šíření antických a islámských textů, sbírání sil a nabírání dechu k dalšímu bádání a rozvoji matematického myšlení. Až do začátku patnáctého století nenacházíme v Evropě až na několik málo výjimek tvůrčí matematiky; situace se výrazně zlepšila až v období renesance. Nové významné matematické výsledky přináší až šestnácté století (objev metody řešení algebraických rovnic třetího a čtvrtého stupně, práce s komplexními čísly, rozvoj symboliky atd.)* J. Bečvář [Beč01, str. 10]

Po přibližně tisíciletém období popsaném v kapitole druhé následuje další zhruba tisícileté období, které dnes historikové shodně nazývají *středověk*. V dalším textu budeme středověk chápat jako období zahrnující šesté až patnácté století, což je pro naši orientaci z hlediska vývoje matematiky zcela dostačující. V přesném datování středověku se odborníci liší.[1] Obdobím středověku se budeme zabývat v části 3.1. Ačkoliv je toto období často charakterizováno jako období celkového úpadku a

[1] Středověk bývá vymezován nejen roky 476 (zánik Západořímské říše) a 1492 (Kryštof Kolumbus objevil Ameriku), ale také např. roky 324 (založena Konstantinopolis, později Istanbul) a 1453 (zanikla Byzantská říše) i jinými mezníky. Podrobněji o vymezení středověku viz např. [Beč01, str. 8].

téměř úplného utlumení zájmu o geometrii zejména v Evropě, budeme sledovat „cestičky“, které umožnily přenést starověké znalosti o křivkách do doby, kdy se geometrie dočkala postupného oživování. Této epoše – počátkům evropské renesance – je věnována část 3.2. V posledních odstavcích této kapitoly budeme svědky „znovuobjevení“ starověkých znalostí o křivkách a jejich uchopení novými metodami, což vedlo ke vzniku zcela nových myšlenek, a sice ke zrodu analytické geometrie jako metody studia speciálních křivek. Těžiště našeho zájmu bude ve studiu Descartova přínosu k teorii křivek (část 3.3).

3.1. Studium křivek po zániku Západořímské říše

Nejdříve se velmi stručně zmíníme o geometrických znalostech v Číně a Indii (odstavec 3.1.1). V odstavci 3.1.2 se budeme věnovat geometrii pěstované v oblastech obsazených Araby, která měla pro další rozvoj znalostí v Evropě zásadní význam, a v odstavci 3.1.3 soustředíme pozornost na geometrické znalosti ve středověké Evropě. Nebudeme popisovat široké souvislosti s historickými událostmi a kulturním vývojem tehdejší doby. Tato fakta jsou dobře popsána a zhodnocena v dostupné literatuře. Budeme se věnovat výhradně našemu vytyčenému tématu a také ostatní matematické objevy či pokrok v jiných oblastech než těch, které určitým způsobem souvisely s teorií křivek, budeme většinou zamlčovat, neboť (jak již bylo několikrát zdůrazněno) není naším cílem podat široký pohled na rozvoj matematických znalostí.[2]

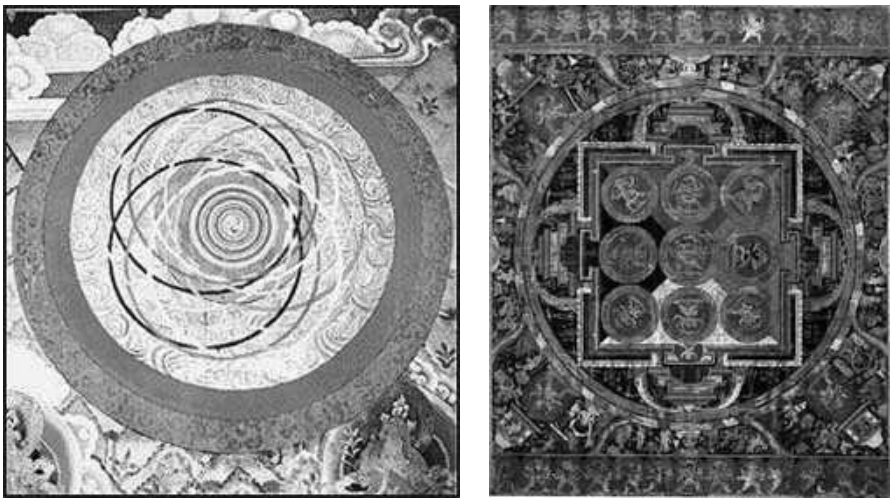
3.1.1. Čína a Indie

V kapitole první jsme mluvili o tom, že první nepřímé důkazy o geometrických znalostech obyvatelstva žijícího na území dnešní Číny a Indie sahají daleko před počátek našeho letopočtu.

Nejstarší dochovaný čínský spis věnovaný výhradně matematice je *Ťiou čang suan šu (Matematika v devíti knihách)* shrnující výsledky matematiků žijících v prvním tisíciletí př. Kr.[3] Poznatky starověké indické matematiky pocházejí z období, kdy vznikaly *Védy* (posvátné náboženskо filozofické texty). Geometrické konstrukce a výpočty jsou obsaženy v knihách *Šalvasútra (Pravidla provazce)*. Názory odborníků na jejich

[2] Literatura zabývající se rozvojem matematických znalostí ve středověku viz. str. 126. Z těchto prací byly také čerpány výchozí údaje pro tuto kapitolu.

[3] Traktát se dochoval v redakci Liou Chueje z roku 263, sepsán byl pravděpodobně ve 2. století př. Kr., přesná doba vzniku ani autoři nejsou známy [Juš77, str. 31].



(a) Indie (b) Tibet

Obrázek 3.2: Buddhistické mandaly

přesné datování se liší, většina je řadí do 7.-5. stol. př. Kr. (viz odstavec 1.1). Spisy čínských a indických matematiků – jak tyto první spisy, tak i následující – mají společný rys: stručný výklad, který často neobsahuje žádné důkazy.

Prameny podle nichž soudíme na geometrické znalosti indických matematiků jsou velmi kusé a ve srovnání s prameny přibližujícími nám jejich znalosti z aritmetiky, algebry a teorie čísel mají daleko menší význam. Zvláštní geometrická díla neexistovala a pravidla pro měření geometrických útvarů byla zahrnuta ... do obecné vědy o výpočtech. [Juš77, str. 156]

Tento typ geometrických znalostí přetrvával až do novověku. Lze říci, že také po celý novověk (v podstatě až do 20. století) zůstávají geometrické znalosti Indie a Číny daleko za Západem. Z hlediska studia křivek se nabízí otázka, proč se v čínské a indické matematice neobjevují kromě kružnice (a snad elipsy) žádné ze speciálních křivek tak, jak je známe z odkazu antických učenců. A to i přesto, že v některých jiných oblastech matematiky dosáhly tyto civilizace vysoké úrovně znalostí (trigonometrie, řada metod algebry a teorie čísel, Indie - desetinná soustava), které ovlivnily vývoj vědy v Evropě. Tento fakt bezpochyby úzce souvisí se zcela odlišnou filosofií obou kultur. Zatímco řecká matematika vyrůstala spolu s (nám blízkou) „Aristotelovskou“ logikou, východní filozofie (a je

v tomto směru jedno, zda jsou to myšlenky spjaté s budhismem, taoismem či jiným náboženským směrem) byla – a dá se říct i je – zcela odlišná. Učí nás, že člověk nikdy nemůže pochopit realitu v myšlení. Myšlení nás může dovést jen k poznání, že nám nemůže dát poslední odpověď. Svět myšlení je v zajetí paradoxu. Ačkoliv se čínští a indičtí matematikové neomezovali výhradně jen na praktické úlohy, měli daleko od toho přístupu k matematice, který byl vlastní Řekům, tj. na základě několika předpokladů deduktivně budovat teorii, podpořenou navíc rozvinutou metodou důkazu. Matematika nikdy nemohla sloužit u východních civilizací jako prostředek k poznání světa a jeho zákonitostí (srovnání str. 33) neboť východní filozofie učí, že pravého poznání lze dosáhnout nikoliv myšlením, ale jednáním. A tak zatímco v antice se objevují nejrůznější křivky nejen jako projev jakéhosi vnitřního cítění a estetiky (korintský sloup, zdobené nádoby apod.), ale především jsou popsány během usilovné myšlenkové činnosti starověkých myslitelů, ve východních kulturách je tomu zcela jinak. V matematice jako odrazu myšlenkové činnosti tyto speciální křivky nenajdeme, ale jejich tvary jsou vtisknuty do uměleckých i spotřebních předmětů s větší intenzitou než kdekoliv jinde. Nejen odlišná filozofie dává zdejším obyvatelům čas (kontrastující s Evropským spěchem) věnovat se mravenčí práci i odlišné vnímání reality se stalo vhodnou půdou pro vznik složitých ornamentů, které nemají v západní kultuře obdoby.

3.1.2. Arabská geometrie

Významnou etnickou skupinou, která ovlivnila evropskou kulturu a vzdělanost byli Arabové.[4] Arabové se během svých výbojů setkávali s „vyšší“ kulturou než byla jejich vlastní. Přicházeli do těsného kontaktu se starými vyspělými kulturami a civilizacemi (mimo jiné řeckou), tuto kulturu i vědecké výsledky přejímali a dále rozvíjeli. Složitý vývoj v oblasti Blízkého a Středního východu zde nebudeme popisovat. Poznamenejme jen, že v 7. století dochází k neobvykle rychlému rozvoji arabské říše a během necelého století si Arabové podrobili obrovské území. Svého vrcholu dosáhla arabská říše v letech 750–1258.

Na přelomu 8. a 9. století se mnoho učenců a překladatelů soustředilo

[4]Poznamenejme, že pod názvem **Arabská geometrie** budeme rozumět geometrii v zemích Blízkého a Středního východu. Geometrické práce, o nichž budeme hovořit, vznikaly na území dobytém Araby a v drtivé většině byly psány arabsky. Samotní autoři však byli mnohdy jiné národnosti (Peršané, Řekové, Židé apod.) Někdy se také používá název **Islámská matematika** (např. Juškevič [Juš77], Katz [Kat98]) či geometrie, ale ani otázka náboženství u těchto autorů není jednoduchá.

v Bagdádu.

Bagdádská matematická škola aktivně pracovala dvě stě let. V prvním období se věnovala hlavně studiu starých antických autorů a vydávání jejich děl v arabštině. Při formování arabské matematiky však svou roli sehrály i kontakty s Indií, Chwárizmem, Persií a později i Čínou. Velmi rychle byla propracována arabská matematická terminologie, která předtím prakticky neexistovala. Přibližně za 100–150 let byla do arabštiny[5] *přeložena z řečtiny nebo syrských překladů základní díla Eukleida, Archiméda, Apollónia, Hérona, Ptolemaia, Diofanta a jiných autorů. Některá díla, jako např. Eukleidovy Základy, byla přeložena i vícekrát. Překlady a komentáře prováděli významní učenci té doby, kteří k těmto pracím přidali i něco nového. Pokud tedy hovoříme o tom, že se středověká Evropa seznámila s řeckou matematikou, pak to již byla matematika dobře okomentovaná, systematizovaná a didakticky zpracovaná.* [Bečo1, str. 155]

Tato práce dala arabské matematice (i vlastní geometrii) zcela odlišný charakter ve srovnání s matematikou čínskou a indickou:[6]

Arabská matematika se od matematiky indické nebo čínské liší právě tím, že se rozvíjí pod vlivem matematiky řecké a je tedy založena na deduktivním výkladu a logickém odvozování. Osvojení klasického dědictví umožnilo arabským matematikům dosáhnout v rozpracování numerickoalgebraických problémů vyšší úrovně a použít při jejich řešení a zobecnění podstatně silnější prostředky, než jakých užívali Indové a Číňané. Tam kde se matematici těchto národů omezili na vytvoření izolovaného početního návodu, arabští matematici vytvořili celé teorie. [Bečo1, str. 156]

Matematika byla pěstována také v severozápadní Africe a na Pyrenejském poloostrově, tyto oblasti byly obsazeny Maury (jak byli později tito dobyvatelé – Arabové a Berbeři – nazýváni). Právě rozvoj vědy v maurských státech a na územích, která obsadili Španělé, měl pro rozšíření vědeckých poznatků v Evropě zásadní význam. Ve Španělsku pracovalo ve 12. a 13. století mnoho překladatelů a kompilátorů, kteří přepracovali do latiny řadu arabských traktátů a arabských překladů řeckých spisů.

Pro nás budou vzhledem ke studovanému tématu stěžejní dvě otázky:

- Jaký byl osud starověkých geometrických textů, které obsahovaly poznatky o křivkách?
- Čím k těmto poznatkům o křivkách přispěla arabská geometrie?

[5] Výjimečně byla tato díla překládána i do jiných jazyků. Např. al-Bírúní přeložil do sanskrtu Eukleidovy *Základy* a Ptolemaiův *Almagest*.

[6] Svou roli zde jistě sehrála filozofie islámu.

Překlady geometrických spisů

Některé antické spisy se dochovaly právě jen díky Arabům, kteří je přeložili do arabštiny. Od konce 9. století zejména však ve století 12. byly přeloženy z arabštiny do latiny a dostaly se tak zpět do Evropy.

Nás bude vzhledem k vytyčenému tématu zajímat především osud Eukleidova spisu ***Základy*** a Apollóniova spisu ***Kuželosečky***. Stručně se zmíníme také o některých pracích Archimeda a o Ptolemaiově *Almagestu*.

Zejména Eukleidovy *Základy* byly nejvíce opisovány a komentovány, proto nejvíce ovlivnily další vývoj. Do arabských zemí se dostaly nejpozději na konci 8. století. První překlad provedl al-Hadždžádž ibn Júsuf ibn Matár.[7] Autorem druhého překladu je Isháq ibn Hunajn, tento překlad se nedochoval, ale dochovalo se jeho přepracování, které provedl Thábit ibn Qurra.[8] Kromě těchto úplných překladů existovala ještě řada překladů částečných – pouze některých knih či zkrácené verze apod. O těch se zde nebudeme podrobně zmiňovat, neboť při překladu z arabštiny do latiny byly klíčové pouze zmiňované dva překlady – al-Hadždžánův a překlad Isháqa ibn Hunajna přepracovaný Thábitem ibn Qurrou.[9] Pro rozvoj arabské matematiky měly větší význam komentáře Eukleidových *Základů* než samotné překlady. Jeden z nejznámějších je *Výklad Eukleida* z roku 1248 od Násíra at-Túsího.

Pro nás je vzhledem ke křivkám nejpodstatnější Apollóniův spis *Kuželosečky*. Jediný z pozdějších učenců, kdo byl schopen pochopit tento spis, byl Pappos, který toto dílo ve třetím století částečně rozvinul (viz srt. 64). V období středověku Apollónius nenašel ve studiu kuželoseček následovníka. Jsou známy ještě další tři komentáře – Serénos z Antinoie (4. stol.), Hypatie (5. stol.), Eutokios z Askalonu (6. stol.), které ale nepřinesly nic nového. V Byzanci byly opisovány zejména první čtyři knihy kuželoseček, které sloužily jako učebnice – přeloženy do arabštiny al-Himsim. Na straně 50 jsme zmiňovali, že V. až VII. kniha *Kuželoseček*

[7] al-Hadždžádž (popř. Hajjáj) ibn Júsuf ibn Matár (cca 786–833) později vytvořil ještě druhou verzi tohoto překladu, ve které opravil chyby a doplnil některé mezery. Dnes máme k dispozici I–VI knihu a část VII z druhé verze včetně komentářů al-Najrízího, pravděpodobně máme i knihy IX–XII, chybí kniha VIII.[Bečo1, str. 170].

[8] Thábit ibn Qurra (830–901), významný překladatel a komentátor řeckých děl, vlastní práce zejména v algebře a teorii čísel. Z ibn Qurrova reevidovaného překladu se dochovalo nejméně 19 rukopisů, nejstarší (z 10. století) se nachází v Teheránu. [Bečo1, str. 170] Kromě Eukleidových *Základů* a Apollóniových *Kuželoseček* přeložil také Archimedovy spisy *Měření kruhu, O kouli a válci*, jeho práci o pravidelném sedmiúhelníku a další.

[9] Připomeňme ještě, že v arabském světě existovaly i práce v jiných jazycích, např. do hebrejštiny byly *Základy* přeloženy v letech 1225–70.

se dochovala jen díky arabskému překladu. Byl to překlad již zmiňovaného Thábit ibn Qurry. Podrobněji se k tomuto překladu vracíme na straně 79. V arabských zemích dále využil kuželosečky pouze Ibn al-Hajtham[10] a Omar Chajjám, o kterém se zmíníme podrobněji. Dá se říci, že Apollóniovy *Kuželosečky* neměly na arabskou matematiku větší vliv, ovšem zásadní přínos arabských překladů je spatřován v zachování této práce pro evropskou novověkou matematiku.[11]

Právě tuto práci studovali (mimo jiné) Fermat a Descartes a stala se patrně největším podnětem pro rozhodující pokrok ve studiu křivek během 17. století (viz kapitola 3.2).

Poznamenejme ještě, že překlady řeckých pojednání do arabštiny často vyžadovaly značnou kreativitu při vytváření termínů, neboť cizí termíny nezapadaly snadno do struktury arabského jazyka. Např. řecké slovo hyperbolè bylo nejprve přeloženo jako úparbúlá a později jako *quad'zā'id* („chybějící řez“).[12]

Křivky v arabské geometrii

Od 9. století se bagdádští matematikové začali zabývat kubickými rovnicemi.[13]

Geometrickou metodu řešení rovnic třetího stupně pomocí kuželoseček znali už Řekové, ale používali ji jen pro konkrétní případy. V žádném případě nelze mluvit o vypracování obecné teorie řešení těchto rovnic, dokonce tuto metodu ani nepoužívali k řešení nějakého širšího okruhu úloh. To udělali teprve arabští matematici.

Archimédovu úlohu řešili pomocí křivek druhého stupně, tj. kuželoseček, např. Abů Dža^{c}far al či al-Hasan ibn al Hatham.[14] Geometrickou

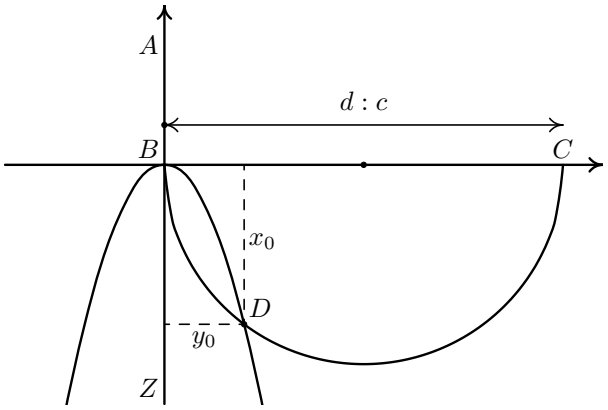
[10] Ibn al-Hajtham (cca 965–1039) studoval vlastnosti paraboly v souvislosti se zápalnými zrcadly [Bečo1, str. 177].

[11] *Pokud je však možno soudit ze známé literatury, nebyla v dílech matematiků Blízkého a Středního východu podstatně změněna nebo doplněna antická teorie kuželoseček. Hlavní zásluha matematiků islámských zemí v této oblasti spočívá v zachování a předání antických objevů.* [Juš77, str. 284].

[12] Viz [Gra94, str. 72], kde je arabský termín *quad′zā′id* překládán jako *exceeding section*.

[13] Impulsem k tomu byla pravděpodobně Archimédova úloha o rozdělení koule rovinou tak, aby poměr objemů takto vzniklých kulových úsečí se rovnal danému poměru (4. věta druhé knihy *O kouli a válci*) – viz [Juš77, str. 253].

[14] al-Hasan ibn al Hatham (cca 965–1039), matematik, astronom fyzik a lékař, v západní Evropě známý pod jménem Alhazen. V jeho práci *Kniha optiky* řešil mimo jiné problém tzv. „lesklých bodů“, což vede na rovnici čtvrtého stupně. Řešil ji pomocí kružnice a hyperboly. V 17. století se touto úlohou zabývali Ch. Huygens, I. Barrow a další. Viz [Juš77, str. 254].



Obrázek 3.3: Využití kuželoseček pro konstrukci kořenů rovnice $x^3 + cx + d = 0$ u Omara Chajjáma

teorií kubických rovnic se zabýval také Omar Chajjám.[15] U něj nacházíme zřetelně myšlenky, které později využil Descartes (viz str. 97 a další). Uveďme stručně v dnešní symbolice, jak s využitím kuželoseček řeší rovnici

$$x^3 + cx + d = 0. \tag{3.1}$$

Omar Chajjám se drží zákona homogenity. Jestliže x reprezentuje stranu čtverce, c musí zastupovat plochu, aby $c \cdot x$ bylo těleso, a d samo o sobě je tělesem. Konstruuje řešení, kde AB je strana čtverce c, tj. $|AB| = \sqrt{c}$, BC konstruuje kolmo na AB tak, že $|BC| \cdot |AB|^2 = d$, tj. $|BC| = \frac{d}{c}$ (viz obr. 3.3). Dále prodlouží AB až k Z a sestrojí parabolu s vrcholem B, osou BZ a parametrem $\sqrt{c}$. Tato parabola má v dnešním značení rovnici

$$x^2 = \sqrt{c}y. \tag{3.2}$$

Podobně konstruuje půlkružnici

$$(x - \frac{d}{2c})^2 + y^2 = (\frac{d}{2c})^2 \tag{3.3}$$

nebo-li

$$x(\frac{d}{c} - x) = y^2. \tag{3.4}$$

[15] Abu 'l-Fath ᶜUmar ibn Ibráhím al-Chajjám [známější jako Omar Chajjám, v angl. literatuře psáno Khayyam] (1048–1131) napsal knihu *O důkazech úloh algebry a al-muqábaly* (asi v roce 1074) a komentář k Eukleidovým *Základům* (asi v roce 1077), nevíce však proslul čtyřveršími, ve kterých opěvoval lásku a svobodu.

Z rovnic (3.2) a (3.4) obdržíme rovnici (3.1), tj. kružnice a parabola se protínají v bodě $D = [x_0, y_0]$, kde x_0 je řešením rovnice (3.1).

U některých učenců bylo úspěšně započato i zkoumání algebraických řešení, které se poměrně rychle rozšířilo na široký okruh geometrických a dokonce fyzikálních úloh.

V 17. století vzbudily geometrické konstrukce kořenů rovnic vyššího stupně velkou pozornost evropských matematiků. René Descartes vzal za základ své universální matematiky konstrukci reálných kořenů libovolných algebraických rovnic pomocí vhodně volených algebraických křivek. [...] *S aplikací geometrických konstrukcí v algebře bylo u Descarta těsně spojeno rozpracování analytické geometrie, například klasifikace algebraických křivek. Konstrukcí geometrického řešení rovnic se zabývali všichni velcí matematikové 17. a dokonce 18. století,* [...] [Des53, str. 256]

Významnými učenci, kteří aktivně působili v Bagdádu byli bratři Banú Músá.[16] Pod jejich autorstvím se dochoval v latinském překladu Gherarda z Cremony[17] spis *Liber trium fratrum de geometria (Kniha tří bratrů o geometrii*, původní název *Kniha o měření rovinných a sférických obrazců)*. Spis vypovídá o úspěších v geometrii, kterých bylo v Bagdádu během několika desetiletí dosaženo. Jeho latinský překlad sehrál v rozvoji geometrie důležitou roli, neboť v této práci se mohl evropský čtenář poprvé setkat s řešením problému trisekce úhlu v latině. Těžiště knihy je v pravidlech pro výpočet obsahů geometrických obrazců, povrchu koule apod., tj. od námi vytyčeného tématu se poněkud vzdaluje a nebudeme ji zde podrobně rozebírat (obdobně jako al-Chwarízmího geometrická část algebry či na ni navazující praktická geometrie Abu 'l Wafovy knihy pro písaře). Bratřím Banú Músá patří ještě řada dalších geometrických (i astronomických, filozofických aj.) prací – mimo jiné i o kuželosečkách.

V devátém století Banú Músá, tři schopní geometři, chtěli přeložit text, ale měli jen poškozený rukopis prvních sedmi knih a nerozuměli mu. Jeden z bratrů, Hasan, vypracoval vlastní teorii řezů válce, protože věřil, že by mohla sloužit jako úvod do teorie řezů na kuželi v Kuželosečkách. Po jeho smrti jeho bratr Ahmad našel v Sýrii rukopis prvních čtyř knih s komentáři Eutokia. Pomocí dvou rukopisů a Hasanovy teorie, Ahmad

[16] *Tři bratři Banú Músá (Jafar Muhammad, al-Hasan a Ahmad) byli synové jednoho z důvěrníků chalífy al-Ma´múna. Zabývali se matematikou, astronomií, hudebními nástroji a mechanikou. Postavili vlastní observatoř, sbírali rukopisy, podporovali překládání řeckých textů do arabštiny.* [Bečo1, str. 176].

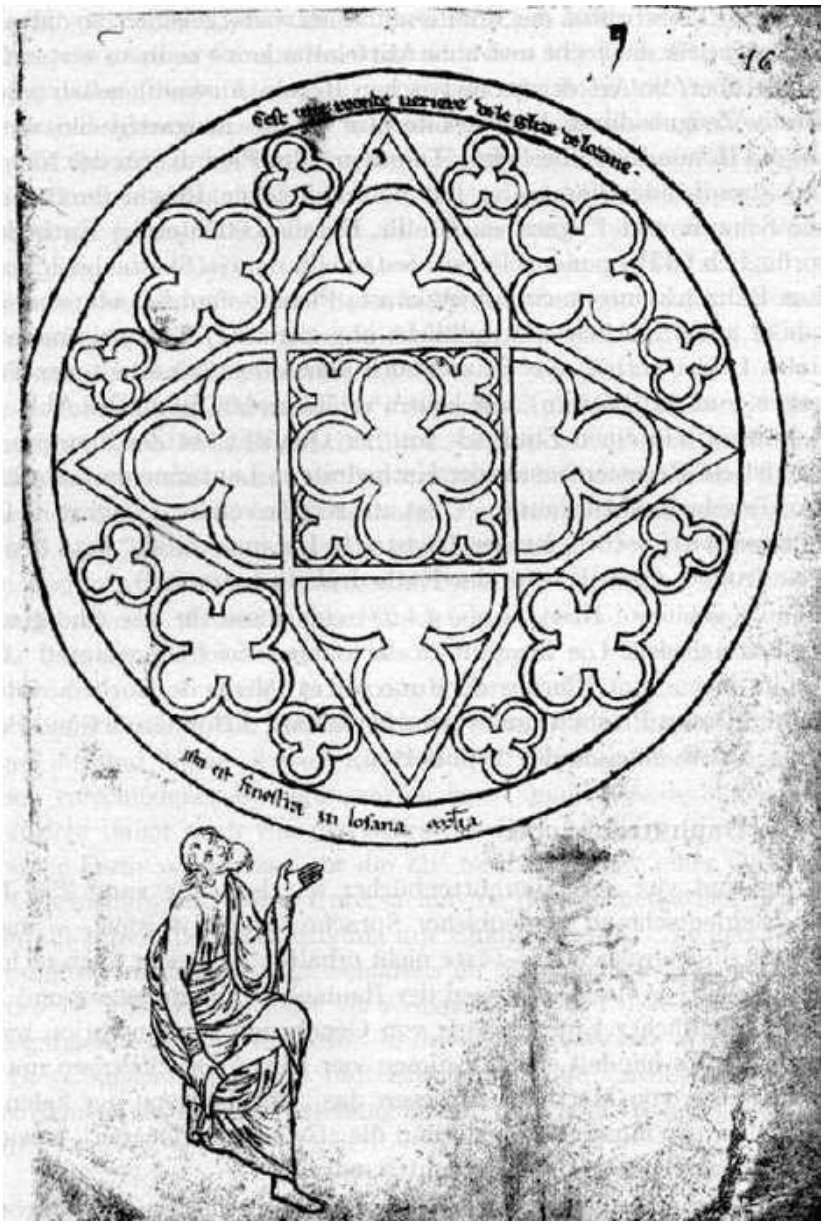
[17] Gherardo z Cremony (1114–1187).

a třetí z bratrů, Muhammad, byly schopni pochopit Apollónia, a vložili komentáře do řeckého textu, aby byl srozumitelnější. Potom Banú Músá dohlíželi na sedm knih překládných al-Himsim (I–IV) a Thábitem ibn Qurrou (V–VII). [Gra94, str. 72]

Překlad knih V–VII pod vedením bratrů Banú Músa viz [Apo90].

Konstrukce kuželoseček zaujala i jiné matematiky. Např. Ibrahím ibn Sínán[18] napsal práci o bodových konstrukcích elipsy, hyperboly a paraboly pomocí kružítka a pravítka. Byla také vynalezena pomůcka, která dovolovala rýsovat kuželosečky podobně jako kružítkem kružnici.

[18] Ibrahím ibn Sínán (980–946), vnuk Thábit ibn Qurry.



Obrázek 3.4: Skica Villarda d'Honnecourta pro gotickou katedrálu z let 1230–35, [Scr00, str. 210]

3.1.3. Geometrie ve středověké Evropě

> [...] *moderní fyzika a technika, ale i myšlenky humanismu a demokracie jsou plodem evropského vývoje.* [...] *klíčem, mostem k tomuto vývoji byl právě evropský středověk, oběť středověkého člověka.*
> *Středověký člověk byl* [...] *vlastně stále připraven na utrpení a smrt a křesťanská víra mu dávala útěchu a naději na odměnu po odchodu z tohoto slzavého údolí. Zdálo by se, že člověk bude za těchto podmínek rezignovat na tvůrčí aktivity ve svém předchozím pozemském životě. Ale právě naopak. Z počátečních zmatků po rozpadu antického světa a pádu kulturní úrovně, po usazení stěhujících se národů se středověká kultura a myšlení začínají odrážet ode dna, aby se nakonec vzepjaly do výše katedrál a postupně připravily půdu novodobé evropské kultuře.* I. Štoll [Beč01, str. 378]

Publikace *Matematika ve středověké Evropě* [Beč01] v širokém kontextu přibližuje události ovlivňující vývoj vzdělanosti, vědy a kultury a zabývá se vývojem matematického myšlení v tehdejší Evropě. Přistoupíme proto přímo k vytyčenému tématu. Budeme sledovat zejména dvě otázky:

- Co nového přinesl Evropský středověk k teorii křivek?
- Co se dělo se znalostmi o křivkách, které měli starověcí učenci?

Na přelomu 4. a 5. století dochází v západní Evropě ke vzniku nové společnosti postupným mísením římských obyvatel a barbarských dobyvatelů. Vznikání a zanikání nových barbarských státních útvarů na území bývalé západořímské říše, které však byly značně politicky i hospodářsky nestabilní, je charakteristickým rysem 5. až 8. století. Kulturní a vědecký vývoj byl velmi pomalý a nerovnoměrný. V hospodářském a denním životě se vystačovalo s minimem aritmetických a geometrických znalostí – použití základních aritmetických operací a pouček o měření nejjednodušších geometrických útvarů. Duchovní vývoj Evropy v období středověku je výrazně spjat s vývojem křesťanství. V počátku byl ovlivněn zejména významnými ojedinělými učenci a církevními mysliteli, později také církevními řády a jejich kláštery, kde se udržovaly některé prvky antické vědy a vzdělanosti. I v klášterech se však zájem o geomet-

rii omezoval na krátké informace o jednotlivých geometrických útvarech a jednoduchá měření.

Abychom si udělali jasnější představu na jak nízkou úroveň klesly tehdy geometrické znalosti, pojednáme krátce o pracích některých osobností tehdejší doby:[19]

- 6. století: **Boëthius**[20] se zasloužil o organizaci středověkého vzdělávání. Jako průprava ke studiu teologie sloužilo tehdy tzv. sedmero svobodných umění (trivium – gramatika, rétorika, dialektika a quadrivium – aritmetika, geometrie, astronomie a hudba). Boëthius napsal úvody do kvadriviálních disciplín, jednalo se o překlady spisů (nebo jejich částí) různých řeckých autorů, pro geometrii to byl Eukleides. Spisy o geometrii a hudbě byly ztraceny asi v 7. století. Jako tzv. Boëthiova *Geometrie* bývá někdy uváděna i práce *Euclidis Megarensis Geometriae libri duo ab An. Manl. Severino Boetio translati.*

  Názory odborníků na to, které spisy vlastně napsal Boëthius, se liší.[21] Ať už byl jejich autorem kdokoliv, co se týče obsahu těchto spisů, nelze než souhlasit se slovy K. Mačáka:

  Matematický obsah Boëthiových kvadriviálních spisů je ve srovnání s díly antické matematiky takřka nulový. Z hlediska dějin matematiky má dnes Boëthius význam pouze historický, v období přechodu od vzdělanosti antické ke vzdělanosti západoevropské však jeho díla sehrála významnou (ne-li rozhodující roli); podle jeho učebnic se učilo zhruba tisíc let a tuto skutečnost nelze přehlédnout. [Bečo1, str. 117]

- 7. století: **Isidor ze Sevilly**[22] je autorem naučného díla *Etymologie*, ve kterém shrnuje ve dvaceti knihách antické vědění všeho druhu.

  Toto Isidorovo dílo bylo vhodné spíše pro vyhledávání informací než pro soustavné čtení a studium. Je nepůvodní, má řadu velmi

[19] Poznamenejme, že tento výběr se řídil výhradně vztahem těchto autorů k našemu úzkému tématu. O některých významných myslitelích se tu nezmiňujeme vůbec. Z obdobných důvodů zmiňujeme jen práce, které měly nějaký vztah ke geometrii, ačkoliv jiné spisy uvedených osob jsou často obecně daleko významnější. Pojednání o uvedených učencích (i o některých dalších) v širším kontextu včetně bohatých odkazů na další literaturu lze najít v [Bečo1].

[20] Anicius Manlius Severinus Torquatus Boëthius (cca 480–524)

[21] Podrobnější informace o původu Boëthiových spisů a další odkazy viz článek K. Mačáka v [Bečo1, str. 103–119].

[22] Isidor ze Sevilly (cca 560–636).

slabých partií, často jde jen o souhrn toho, co autor někde četl nebo slyšel. Obsahuje i různé pověry, bájná vyprávění a fantastické příběhy, přičemž vše je interpretováno jako věrohodné. Do textu jsou včleněny literárně historické poznámky a komentáře nejrůznějšího druhu. [...] *Isidorovy Etymologie se staly nejoblíbenějším středověkým úvodem do odborných disciplín pěstovaných v antice a zároveň užitečným souhrnem znalostí o antických reáliích, silně ovlivnily encyklopedisty sedmého až čtrnáctého století.* [Bečo1, str. 43]

Málá část Isidorových *Etymologií*, kterou věnoval geometrii, je uvedena v tabulce 3.1.[23]

- 10. století: **Gerbert z Aurillacu**[24] byl ve své době jeden z nejvzdělanějších a nejvýznamnějších učenců. Jeho *Geometria* vyšla poprvé tiskem v roce 1721 podle rukopisu benediktinského kláštera sv. Petra v Salzburku.[25]Ačkoliv se o Gerbertově autorství tohoto spisu vedou spory, pro nás je důležité, že tato práce charakterizuje znalosti tehdejších učenců. Tištěné vydání práce obsahuje 94 článků,[26] ve kterých zejména vysvětluje jednoduché geometrické poznatky o rovinných útvarech formou návodů pro řešení konkrétních úloh. Nepodává důkazy ani nevysvětluje použité metody. Na různých místech textu se objevují jména Pythagoras, Platon, Eratosthenes, Boëthius, inspiroval se patrně také některými spisy arabskými.

  Pro nás je zajímavý první článek, ve kterém vysvětluje základní pojmy, mezi jinými si také klade otázku, co je to *linea*, tj. čára: *Quid sit corpus solidum? Quid linea, punctum, superficies? Quid pes solidus constratus etc. (Co je pevné těleso? Co čára (přímka), bod, plocha? Co základ(na) konstrukce tělesa atd.)*

I když se kultura středověké Evropy rozvíjí až do 10. století, kdy se *objevily první příznaky intelektuálního procitnutí*,[27] velmi pomalu, přece jen se život postupně obohacoval novými technickými postupy, rozvíjel

[23] Poznamenejme, že tato ukázka je i v [Bečo1, str. 85] ovšem bez obrázků a poznámek.

[24] Gerbert z Aurillacu, také Gerbertus Remensis (cca 950–1003).

[25] Pez B. (ed.) *Thesaurus Anecdotorum Novissimus*, 1721.

[26] Poznamenejme, že některé části z tohoto textu jsou přetištěny a komentovány opět v [Bečo1].

[27] [Juš77, str. 332].

11. DE QVADRIPERTITA DIVISIONE GEOMETRIAE

(1) Geometriae qvadripertita divisio est, in planarum, in magnitudinem numerabilem, in magnitudinem rationalem et in figuras solidas. (2) Planae figurae sunt, quae longitudine et latitudine continetur. Numerabilis magnitudo est, quae numeris aritmeticae dividi potest. (3) Magnitudines rationales sunt, quorum mensuram scire possumus, inrationales vero, quorim mensurae quantitas cognita non habetur.

12. DE FIGURIS GEOMETRIAE

(1) Figurae solidae sunt, quae longitudine, latitudine et altitudine continentur, quae sunt iuxta Platonem quinque.
In plano figuram prima circulus est, figura plana et circumducta, cuius in medio punctus est, quo cuncta convergunt, quod centrum geometrici vocant, Latini punctum circuli nuncupant *(sequitur figura)*.
(2) Quadrilatera figura est in plano quadrata, quae sub quattuor rectis lineis iacet, ita *(seq. figura)*. Diananthetton grammon figura plana, [ita] *(seq. figura)*. Orthogonium, id est rectiangulum figura plana. Est enim triangulum et habet angulum rectum *(seq. figura)*. Isopleuros figura plana, recta et subter constituta *(seq. figura)*.
(3) Sphaera est figura in rotundum formata, partibus cunctis aequalis *(seq. figura)*. Cubus est figura propria solida, quae longitudine, latitudine et altitudine continetur *(seq. figura)*. (4) Cylindrus est figura quadrata, habens superius semicurculum *(seq. figura)*. (5) Conon, figura, quae ab amplo in angustum finit, sicut orthogonium *(seq. figura)*. (6) Pyramidis est figura, quae ab in modum ignis ab amplo in acumen consurgit; ignis enim apud Graecos $\pi\upsilon\rho$ appelatur *(seq. figura)*.
(7) Sicut autem infra X omnis est numerus, ita intra hunc circulum omnium figurarum concluditur ambitus *(seq. figura)*.
Prima autem figura huius artis punctus est, cuius pars nulla est. Secunda linea, praeter latitudinem longitudo. Recta linea est, quae ex aequo in suis punctis iacet. Superficies vero, quod longitudines et latitudines solas habet. Superficiei vero fines lineae sunt, quorum formae ideo in superioribus decem figuris positae non sunt, quia inter eas inveniuntur.

Tabulka 3.1: Výklad geometrických pojmů z encyklopedického díla Isidora ze Sevilly *Etymologiae* podle [Isi00, str. 302–305]. Poznámka *j* překladatele k Isidorově definici válce je chybná. U obrázku válce se nejedná o perspektivu, ale o kombinaci dvou kolmých průmětů.

11. ROZDĚLENÍ GEOMETRIE NA ČTYŘI ČÁSTI

(1) Geometrie se dělí na čtyři části: na rovinu, číselnou velikost, racionální velikost a tělesa. (2) Rovinné útvary jsou ty, které jsou vymezeny délkou a šířkou.[a] Číselná velikost je taková, kterou lze dělit aritmetickými čísly.[b] (3) Racionální velikosti jsou ty, jejichž míru můžeme poznat, zatímco iracionální jsou ty, u nichž se nedá poznat, jakou míru mají.[c]

12. GEOMETRICKÉ ÚTVARY

(1) Tělesa jsou vymezena délkou, šířkou a výškou. Je jich pět typů.[d]
Prvním z rovinných útvarů je kruh, což je rovinný útvar vymezený svým obvodem. V jeho prostředku je bod, kam se všechno sbíhá, který geometři[e] nazývají „střed“; latinsky *punctus circuli* (bod kruhu) *(následuje obrázek)*.[f]
(2) Čtyřúhelník je čtyřstranný plošný útvar, který tvoří čtyři úsečky *(následuje obrázek)*. *Dianatheton grammon* je útvar, který vypadá takto: *(následuje obrázek)*.[g] *Orthogonium* je pravoúhlý plošný útvar, a sice trojúhelník, který má pravý úhel *(následuje obrázek)*. *Isopleuros*[h] je plošný útvar, vzpřímený a stojící na základně *(následuje obrázek)*.
(3) Koule je těleso zaokrouhleného tvaru, na všechny strany stejné *(následuje obrázek)*. Krychle je těleso ve vlastním slova smyslu, které je vymezeno délkou, šířkou a výškou *(následuje obrázek)*. (4) Válec je čtverec s půlkružnicí nahoře *(následuje obrázek)*[i] (5) Kužel je těleso, které se zužuje od široké základny, podobně jako rovnostranný trojúhelník[j] *(následuje obrázek)*. (6) Jehlan (*pyramis*) je těleso, jež se zdvihá na způsob ohně od široké základny k hrotu; „oheň“ se totiž řecky řekne πυρ [pȳr] *(následuje obrázek)*.[k]

---

[a] Lindsay vykládá na tomto místě glosu *quae sunt iuxta Platonem numero quinque* („Podle Platona je jich [totiž rovinných útvarů] co do počtu pět“), kterou Arevallus (162a) podle smyslu vhodněji vkládá do odstavce *Etymol.* III,12,1 o prostorových tělesech (v jeho členění III,11,4). Platón ovšem pojednává o jiných tělesech než Isidor, totiž o pravidelném čtyřstěnu, osmistěnu, dvacetistěnu a dvanáctistěnu.

[b] Číselná velikost je ta, která je nějakým počtem zvolených jednotek velikosti.

[c] Nepoznatelnost míry nějaké velikosti znamená, že daná velikost nemůže vzniknout dělením celočíselné velikosti na několik stejně velkých částí.

[d] Lindsayův text na tomto místě nedává dobrý smysl: *Figurae solidae sunt, quae longitudine, latitudine et altitudine continentur, ut est cubus, cuius species quinque in plano. Quarum prima circulus...*, („Tělesa jsou vymezena délkou, šířkou a výškou, např. krychle, jíž je pět typů v rovině. Prvním z nich je kruh...“. Přejímáme proto text Arevalův (162a). Srv. též pozn. 33 k *Etymol.* III,11,2

[e] Lindsayův text uvádí *geometriae*, což na tomto místě nedává dobrý smysl. Arevalus opravuje na *geometrae*, což svým významem odpovídá formě *geometrici*, kterou přebíráme z kodexu *K* (viz Lindsay *ad loc.)*.

[f] Lindsayovo vydání nepřináší ani ke kapitole III,12 žádné obrázky. Přejímáme zobrazení, která ke své edici připojil Arevalus na základě starobylých předloh.

[g] Výraz *dianatheton grammon* je dosti záhadný. Snad se jedná o zkomoleninu slova z δια καθετον [dia katheton] (καθετος [kathetos], „svislý“), srv. Aristotelés, *Pr.* 913b18: δια την καθετον [dia ten katheton] (sc. γραμμόν) [grammen], „svislicí“. Jednalo by se tedy patrně o pravoúhlý čtyřúhelník.

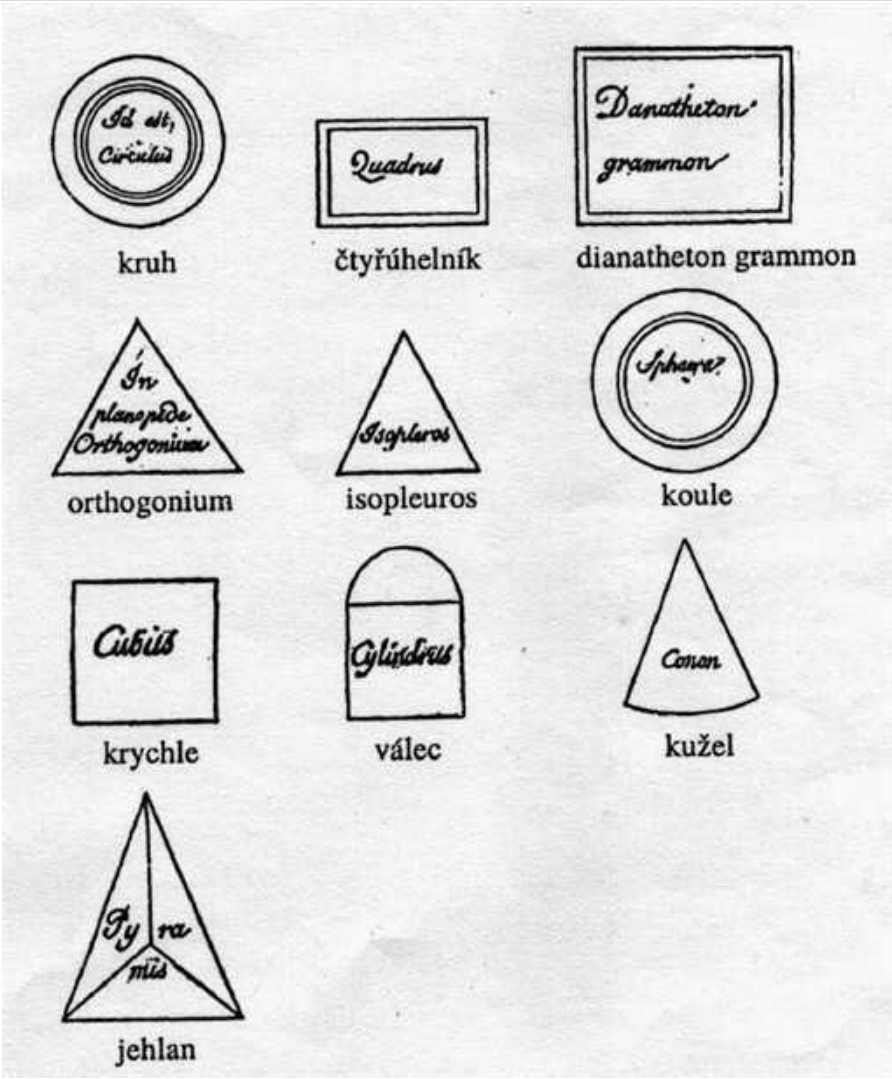
[h] Řec. ισοπλευρος [isopleuros], „rovnostranný“; podle definice se však jedná spíše o trojúhelník rovnoramenný (řec. ισοσκελης [isoskeles])

[i] Definice vychází z pohledu deformovaného v perspektivě.

[j] Isidorovo *orthogonium* (pravoúhlý trojúhelník) je patrně rovnostranný trojúhelník, viz pozn. 40 k *Etymol.* III,12,2.

[k] Text je identický jako *Etymol.* III,8,2. [...]

(7) Stejně jako se každé číslo vejde do deseti, lze i každý útvar vepsat do kruhu *(následuje obrázek)*.
Základním prvkem geometrie je bod, který je nedělitelný. Na druhém místě je čára, která nemá šířku, ale jen délku. Přímka je čára, jež se táhne ve všech svých bodech stejným směrem. A plocha má pouze délku a šířku. Hranice plochy tvoří čáry, jejichž formy nejsou na uvedených deseti útvarech patrné, protože se nalézají uvnitř.



se obchod, začala se budovat města, ve kterých se objevují od 12. století monumentální gotické stavby. Nejdříve nastal tento rozvoj na území Itálie.

Matematické znalosti se staly nutností. Byly čerpány jednak ze zbytků antické vzdělanosti zachované v klášterech, a potom také z praktické zkušenosti (viz odstavec 3.1.3 Gotická architektura). Současně s rozšiřováním obchodu se začaly navazovat i vědecké styky s arabskou kulturou, především přes Španělsko a Sicílii.

Od Leonarda Pisánského[28] pochází sbírka geometrických a trigonometrických úloh z roku 1220 *Practica geometriae (Praxe geometrie).* Název je poněkud matoucí, neboť sbírka je více teoretická než praktická a geometrické i trigonometrické úlohy ve sbírce obsažené jsou řešeny metodami, které spadají spíše do oblasti algebry.[29]

Nicole Oresme[30] ve spise napsaném kolem roku 1370 a zachovaném v opisech pod různými názvy[31] popisuje funkční závislost veličin slovně vyjádřeným pravidlem nebo graficky a užívá pro tuto závislost pojem *proportio (poměr, vztah).*

Jakýkoliv vztah by se ukázal mezi jednou intenzitou a druhou [...]*, tentýž vztah se nachází i mezi první čárou a druhou; a naopak.* [Juš70, str. 141]

Zmiňujeme ho zde zejména proto, že patřil patrně k jednomu z důležitých spisů, které inspirovaly Descarta k jeho *Geometrii* – viz str. 102. Kromě zmiňované práce Oresmeho napomohla Descartovy pravděpodobně prehistorie oboru, který dnes nazýváme infinitesimální počet. Systematický výklad výsledků dosažených v tomto směru do 17. století podal Bonaventura Cavaliery[32] v roce 1635.

Latinské překlady geometrických textů

První úplný překlad Eukleidových *Základů* (I.-XIII. a XV. knihy) z řečtiny do latiny vznikl v polovině 12. století na území dnešní jižní Itálie. Autora neznáme. Tento překlad byl však ve středověku neznámý, tudíž geometrii v tomto období neovlivnil. Jistou roli ve středověké výuce geometrie

[28] Leonardo Pisánský (1170–1250) známý také jako Leonardo Pisano Fibonacci.

[29] Podrobněji včetně ukázek originálního textu viz [Bečˇ01, str. 265–339].

[30] Nicole Oresme (1323–1382).

[31] *De configuratione qualitatum (O konfiguraci kvalit), De uniformitate et difformitate intensionum (O rovnoměrných a nerovnoměrných intenzitách)* apod.

[32] *Geometria indivisibilibus continuorum*; více o tomto tzv. Cavalieriho principu např. F. Cajori: *The History of Mathematics*, Scientia, 1925, str. 301-306.

sehrál zlomkovitý překlad Boëthiův.[33] I když vývoj tehdejší matematiky výrazně ovlivnit nemohl a v okamžiku, kdy došlo k prvnímu překladu *Základů* z arabštiny, ztratily takovéto neúplné překlady význam.

Tři latinské verze *Základů* přeložených z arabštiny jsou spojovány se jménem Adelhardovým.[34] Bývají označovány v literatuře I, II, III a právě verze II byla patrně nejpopulárnější – zachovala se cca v 50 exemplářích, z nichž jeden je v Národní knihovně v Praze. Adelhard vycházel patrně z al-Hadždžádže. Latinské *Základy* přeložené převážně z arabské verze ibn Qurry vytvořil Gherardo z Cremony, jeho překlad je nejbližší původnímu řeckému vydání ze všech překladů z arabštiny do latiny.[35] Existuje ještě další překlad *Základů* z 12. století, zřejmě od Hermana z Dalmácie a z poloviny 13. století pocházejí překlady od Campana[36] doplněné jeho vlastními vysvětlivkami a úvahami.

Apollóniovy *Kuželosečky* byly už pro jeho bezprostřední následovníky příliš obtížné (viz str. 76) a

> *evropskou středověkou matematiku Kuželosečky rovněž neovlivnily. Gherardo z Cremony ve 12. století přeložil pouze zlomky první knihy. První čtyři knihy, které známe z řečtiny, přeložil a tiskem vydal v roce 1566 Frederico Commandino, který přeložil a v roce 1588 vydal rovněž Pappovy komentáře. Z nich se evropští matematici seznámili s obsahem do té doby ztracených knih. Knihy V.–VII. z arabštiny přeložil nepříliš dobře poprvé v roce 1661 Abraham Ecchellensis. Nový překlad těchto knih a rekonstrukci ztracené VIII. knihy vytvořil až v roce 1710 Edmund Halley (1656–1742).* [Beč01, str. 173]

Studium Archimédových prací začíná cca v 6. století, tj. arabští matematici a matematici byzantští se začali s Archimédovými pracemi seznamovat zhruba ve stejnou dobu a západní Evropa je poznala z obou zdrojů. Práce Archiméda a Eutokiovy komentáře studovali také např. stavitelé Sofiina chrámu v Istanbulu – Isidor z Milétu a Anthémios z Frallu. Tyto rukopisy se ale podobně jako mnohé další nezachovaly.[37] Byzantský rukopis z 10. století obsahující překlady Archiméda byl nalezen na palimpsestu Heilbergem v roce 1906 v Istanbulu.

[33] *Boëthiův překlad zahrnoval pouze definice, postuláty a axiomy prvních pěti knih, znění většiny tvrzení z prvních čtyřech knih a důkazy pouhých tří vět z první knihy. Kromě Boëthiova překladu existovaly i další neúplné překlady.* Viz [Beč01, str. 172].

[34] Adelhard z Bathu (1075–1160), jeho překladatelská činnost spadá cca do období 1116–1142).

[35] Viz [Beč01, str. 173].

[36] Giovanni Campano z Novary (1220–1296).

[37] Viz [Beč01, str. 175].

Připomeňme, že významnou roli pro šíření řecké geometrie ve středověké Evropě sehrál překlad geometrického spisu bratří Banú Músá od Gherarda z Cremony, o němž se zmiňujeme na str. 79.

Tím jsme naznačili cestičky, jimiž se ubíraly práce starověkých učenců, které jsou úzce spjaty s naším tématem. V této podobě byly nakonec v 17. století k dispozici Descartovi, Fermatovi a dalším novodobým učencům, aby mohla být řecká geometrie nejen znovuobjevena, ale především dále rozvíjena.

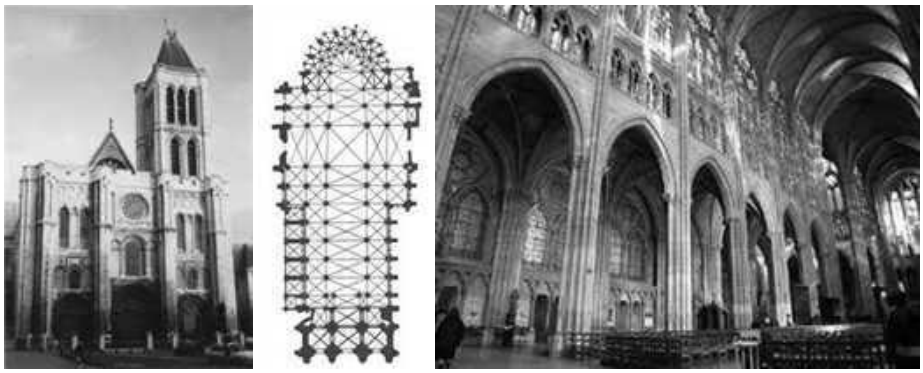
Gotická architektura

> *Nejvýznamnějšími stavbami středověku jsou katedrály,* [...] *právě zde mohli stavitelé ukázat, jak dokonale ovládají hmotu a dovedou jí vtisknout jimi určený tvar, čímž se také svým způsobem mohli blížit Bohu.* A. Šarounová [Bač01, str. 403]

Nelze opominout alespoň krátkou zmínku o křivkách, které se tak impozantním způsobem objevují v gotické architektuře. Gotický sloh vznikl ve Francii na počátku 12. století a vyvíjel se do své vrcholné podoby v podstatě 400 let.[38] Nejstarší dochovanou stavbou, kterou historikové označují za gotickou, je chór opatského kostela v Saint Denis zbudovaný v letech 1140–1143 (viz obr. 3.5). Katedrály jsou považovány za nejvýznamnější gotické stavby, byly jakýmsi vnějším projevem zbožnosti, ale často především moci církve. Geometrie vtisknutá do jejich půdorysů, architektonických tvarů a výzdoby skrývá mnohé zákonitosti. My v tomto odstavci uvádíme jen několik příkladů týkajících se přímo křivek.

Typickým znakem gotických staveb je lomený oblouk vytvořený ze dvou oblouků kružnice (viz obr. 3.5(c)). Základní tvar se konstruoval pomocí rovnostranného trojúhelníku, jehož vrcholy jsou středy oblouků. Posunutím středů oblouků se měnil jeho tvar, přičemž v rané gotice se používal snížený (stlačený) lomený oblouk, ve vrcholné gotice převažoval základní tvar a v pozdní gotice se objevuje i oblouk převýšený, případně různé modifikace – např. oslí hřbet nebo oblouk tudorský. Lomený oblouk působí menšími tlaky do stran než oblouk půlkruhový, umožňuje

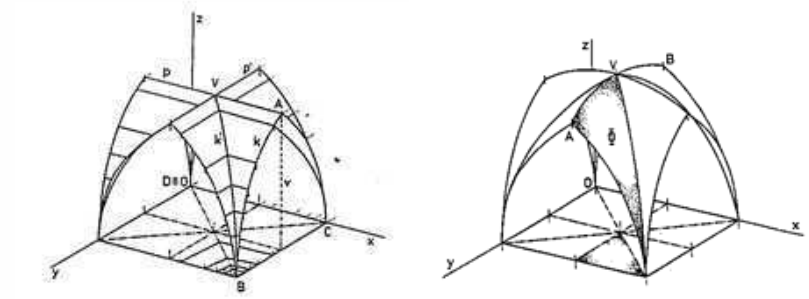
[38] Název *gotika*, ve smyslu „umění barbarského kmene Gótů neboli Němců“, užili poprvé v 15. století italští humanisté k označení „barbarského slohu“, který vládl před nástupem renesance, a který se podle jejich názoru zcela rozcházel s antickým uměním. Ve středověku byl tento sloh šířící se z Francie nazýván *opus francigenum* (dílo Franků).



(a) průčelí (b) půdorys (c) gotické oblouky v interiéru

Obrázek 3.5: Kostel v Saint Denis (zbudovaný 1140–1143)

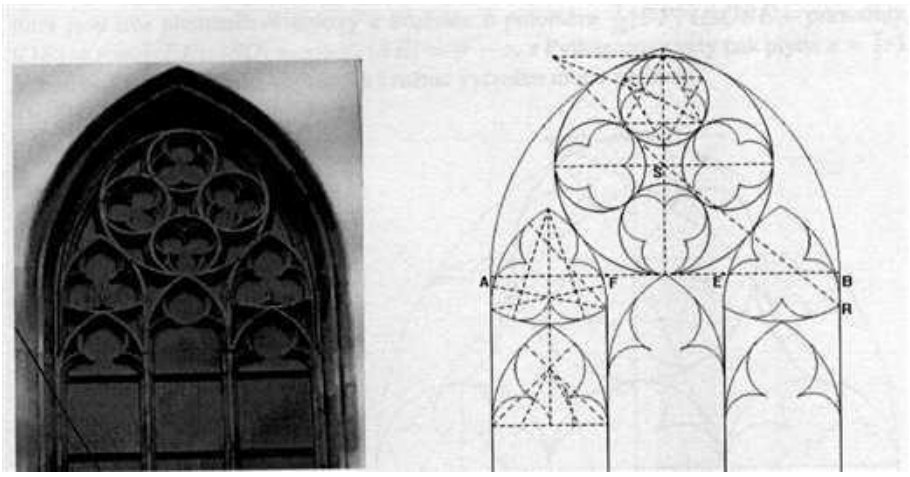
odlehčit stěny a zaklenout různě široká okna nebo čtyřúhelníky při zachování stejné výšky. Při projektování průčelí katedrál a jejich detailů byl lomený oblouk základním dekorativním prvkem, proto je někdy nazýván také gotický. Útvary složené z kružnic a kruhových oblouků se objevují také v klenbách, půdorysech, opěrných systémech, oknech i výzdobě v nespočetných kombinacích od kružnic jednoduše vepsaných do lomených oblouků až po složité variace rozetových oken.



(a) s horizontální přímkovou vrcholnicí (b) se stoupající křivkovou vrcholnicí

Obrázek 3.6: Gotická křížová klenba

Křížová klenba je průnikem dvou válcových ploch a postupně se vyvíjela (viz. obr. 3.6, 3.8(b)). Průnikové křivky – tzv. žebra klenby – jsou částmi elipsy. Tesání různých kamenů bylo nevýhodné, ale zvednutím vrcholu klenby přejdou části elips do kruhových oblouků. Do kruhových oblouků mohou přejít i lomené vrcholnice. V pozdní gotice se zvýraz-



Obrázek 3.7: Gotické okno kostela Sv. Jakuba v Brně, [Pol03, str. 52]

ňují žebra, užívá se klenba kroužená, hvězdová a objevují se i žebra prostorová ve tvaru křivek navíjených na plochy v prostoru – nejčastěji na plochy válcové. Klenební žebra tohoto typu najdeme u nás např. ve Vladislavském sále v Praze (viz obr. 3.8(c)).

Charakteristickým znakem gotické katedrály je kružba. Je to stavební ornament, který se objevuje jak na vnějšku stavby, tak i v interiéru. Kruhová okna s kružbami najdeme většinou nad západním vchodem do katedrál (obr. 3.8(d)). Jsou členěná profilovanými kamennými žebry a bývají buď prázdná nebo zasklená. Kamenné žebra se postupně vyvíjela od jednoduších ornamentů zvýrazňujících symetrie kruhu až po dynamicky působící rozety pozdní gotiky. S rozvojem stavebních technik se zvětšovala také okna v bočních stěnách, i tam bylo třeba vyztužit prosklené plochy kamenými žebry. Později se objevuje kružba i na stěnách, lavicích, oltářích apod. jako tzv. kružba slepá, která má již jen funkci dekorativní. Největší ornamenty měří několik metrů, nejmenší mají sotva průměr dvou centimetrů. Objev kružby bývá spojován se stavbou chrámu v Remeši v roce 1211.

Typickou ornamentikou katedrály je kružba. Vyvinula se z kruhů, které původně vyplňovaly cvikly pod velkými lomenými oblouky oken. V kaplích remešského chóru byl do nich vepsán šestilist, a tak byl nalezen klasický tvar kružby. [...] *Z oken se kružba přenesla na parapety a jiné části stavby pročleněné otvory a nakonec jako slepá kružba sloužila k dekorativní výplni ploch.* [Ull87, str. 32]

Na našem území můžeme jednoduchou kružbu poprvé najít v klášter-

ních oknech ze 13. století (např. klášter v Tišnově u Brna) nebo vesnických kostelících i ze století pozdějších. Bohatší ornamentiku najdeme u chrámů vrcholné gotiky (např. katedrála sv. Víta v Praze – obr. 3.8(d)), dynamicky působící plaménkovou kružbu u nás poprvé použil Petr Parléř.[39] Návrh kružeb vyžadoval nejen umělecký cit, ale i geometrickou zdatnost.

Během oživeného zájmu o gotické katedrály v 19. století bylo nutné k jejich opravě a dostavbě znovuobjevit i mnohé geometrické zákonitosti staveb,[40] jejichž odkrýváním se i dnes zabývají nejen mnozí architekti.

Naznačili jsme, že gotická architektura svědčí o praktickém používání mnoha geometrických znalostí. Rostoucí nároky architektury měly přímý vliv na jejich další rozvoj. Co se týče křivek, dominovaly otázky konstrukce kružnic, varianty Apollóniových úloh.[41] Kromě zmiňované praktické přednosti při přípravě materiálu hrál podstatnou roli i symbolický význam kruhu, neboť středověká architektura je prodchnuta mystickými symboly.

Vlastním smyslem každého středověkého uměleckého díla je postižení [...] *universálního řádu existujícího nad naším smyslovým světem.* [Beč01, str. 401]

A tomu kruh jako dokonale symetrický objekt vyhovoval. Kruh sám o sobě byl navíc chápán jako symbol slunce, opakujícího se cyklu, věčnosti, vesmíru. Kružba, hlavně okenní, měla chránit proti zlu – růžice a hvězdy působily jako znamení světla proti moci temnot.

3.1.4. Shrnutí období středověku

Není pochyb, že ve středověké matematice převládají nad geometrií počtářské praktiky spojené se základními společenskými potřebami té doby. Matematické poznatky o křivkách se téměř nerozvíjí, ve středověké Evropě až na výjimky nejsou ani známy nebo nejsou pochopeny. Lze říci, že křivky byly uchopeny v této době jen dvěma proudy: (1) částečně algebraicky v arabských zemích, kde je v některých případech

[39] Petr Parléř (1332/3–1399), německý architekt a sochař, jeho originální rysy na pergamenu jsou uloženy ve Vídni.

[40] Např. v roce 1859 vznikla jednota pro dostavbu chrámu sv. Víta v Praze. Viz [Beč01, str. 443].

[41] Apollóniovou úlohou nazýváme úlohu sestrojit kružnici zadanou třemi prvky, z nichž může jít o bod (B), tečnu ke kružnici (t) nebo dotykovou kružnici (k), tj. dostáváme deset základních typů těchto úloh: BBB, BBk, BBt, Bkt, Btt, Bkk, tkk, ttk, kkk, ttt. Např. v okně řešeném na obrázku 3.7 najdeme speciální případy Apollónivých úloh.



(a) Sevillská katedrála, Španělsko



(b) Katedrála v Bayonu, Francie



(c) Vladislavský sál, Praha



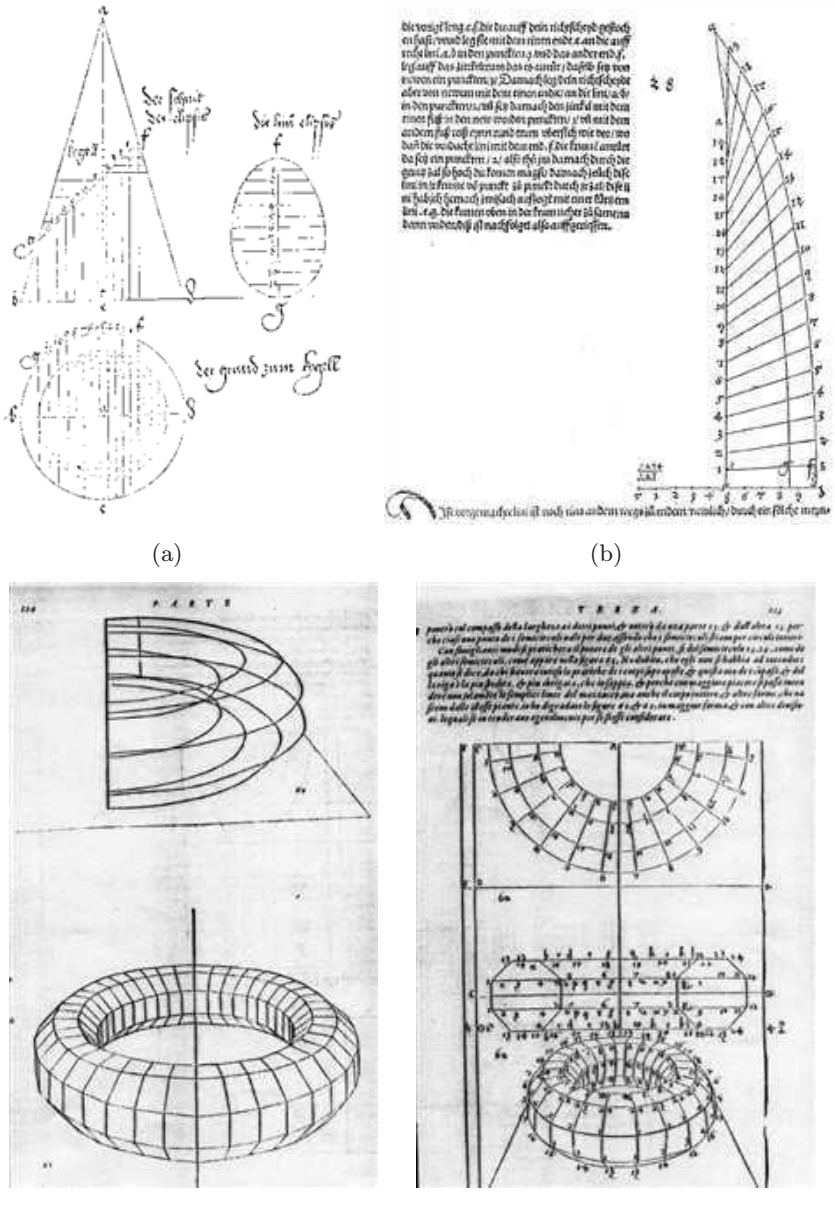


(d) Velké kruhové okno (průměr 10,2 m) na západné fasádě katerály sv. Víta navržené Fr. Kyselou 1929 zvané *Stvoření světa v šesti dnech* (sestaveno z 26 470 barevných sklíček spojených olovem)

Obrázek 3.8: Křivky v gotické architektuře

ukázáno jejich využití pro řešení rovnic, čímž předznamenaly příchod analytické geometrie; (2) v podobě významných mystických symbolů se objevují v orientální i evropské středověké architektuře a umění a spolu se zdokonalující se technikou staveb to byly mimo jiné i křivky, které začaly klást vyšší nároky na geometrické znalosti (průnik ploch [chodeb], výplň oken apod. – viz odstavec 3.1.3). Ale zúžit oživení zájmu o křivky na potřeby praxe by nebylo správné. Podobně jako před více než tisíciletím (cca v 6. stol. př. Kr.) rodící se nová řecká filozofie uchopila kněžími střeženou Egypskou mystiku plnou geometrických symbolů a vztahů, tak také nastupující období renesance se začíná ptát na tajemství středověkých klášterů.

Arabským zemím pak vděčíme za zachováná znalostí starověku do doby, kdy byly znovuobjeveny italskou renesancí.



(a) (b)

(c) (d)

Obrázek 3.9: Ukázky ze spisu Albrechta Dürera z roku 1525 *Underweysung der Messung* (a), (b) a Daniela Barbaro z roku 1569 *Practica della Perspettiva* (c), (d).

3.2. Křivky v období renesance

> *Originální texty Eukleida a Prokla, které byly uchovány v Byzanci, přišly na Západ během patnáctého století, v jehož počátku se zvýšila oddanost k antickému modelu známá jako renesance. Základy byly jednou z prvních tištěných knih.*[42]
>
> J. L. Heilbron [Hei98, str. 8]

V předchozích odstavcích jsme ukázali, že v posledních stoletích středověku dochází k postupnému oživování zájmu o geometrii, který ještě zesílil v polovině 15. století. Na oživování geometrie tehdy působily dva aspekty: prvním z nich byly rostoucí nároky architektury na geometrické znalosti, druhým lineární perspektiva u umělců italské renesance. Začínají se opět studovat speciální křivky, přičemž badatelé z počátku znovuobjevují starořeckou matematiku, která se dochovala zejména díky arabskému světu.

3.2.1. Perspektiva

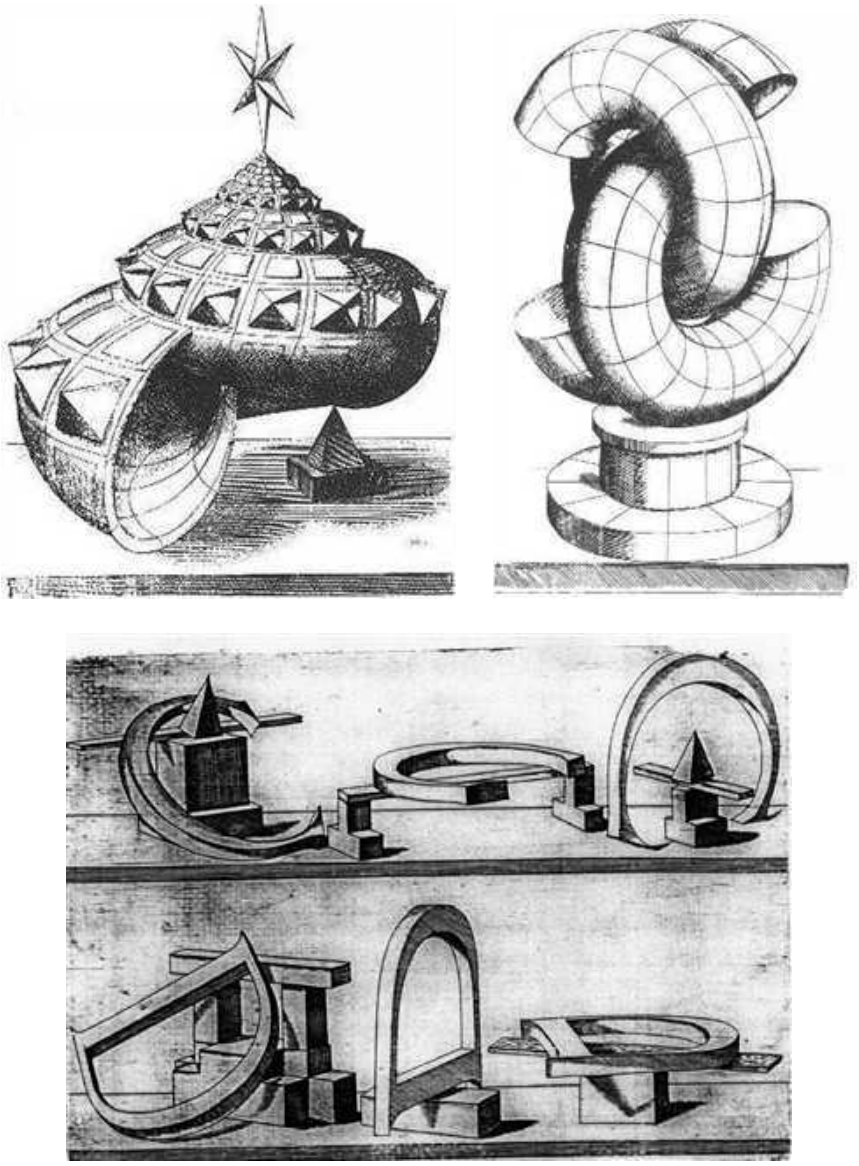
V malířství italské renesance od počátku 15. století vzniká druhý proud, který významně ovlivnil znovuoživení geometrie a tím i znovuoživení zájmu o křivky – lineární perspektiva. Základní principy lineární perspektivy znovuobjevil architekt Brunelleschi,[43] v malířství k lineární perspektivě přispěli zejména Massaccio, Piero della Francesca, Leonardo da Vinci a Raffaelo Santi. Od italských renesančních umělců se zachovala řada traktátů, některé již z rané renesance,[44] z nichž významnější teoretickou prací je až spis Albrechta Dürera[45] *Underweysung der Messung Mit dem Zirckel und Richtscheyt in Linien, Ebenen und gantzen Corporen (Příspěvek k měření s kružítkem a pravítkem v přímkách, rovinách*

[42] *The original Greek texts of Euklid and Proclus, which had been preserv in Byzantium, came West during the fifteen century, at the beginning of that heightaned devotion to antique models known as the Renaissance. The same period saw the invention of printing. The Elements was one of the first books printed.*

[43] Fillipo Brunelleschi (1377–1446), stavitel kopule dómu ve Florencii v letech 1420–1436.

[44] Leone Baptista Alberti a jeho práce z roku 1436, Piero della Francesca a jeho práce z let 1470–1490 *De prospectiva pingendi (Perspektiva pro malíře)*, ve které podává detailní popis jak kreslit dvou a třídimenzionální obrázky; a další.

[45] Albrecht Dürer (1471–1528) strávil několik let v Itálii studiem perspektivy.



Obrázek 3.10: Ukázky z Lenckerova traktátu *Pespektiva literaria* z roku 1567 (na obrázcích se nachází intuitivně velmi přesně zachycené křivky na ploše)

a tělesech) z roku 1525[46] a spis Daniela Barbaro[47] *Practica della Perspectiva (Praktická perspektiva)* z let 1568-9. Uvedeme některé zajímavé skutečnosti týkající se křivek.

V první ze čtyř částí Dürerova pojednání najdeme popis konstrukce několika křivek (viz příklad na obr. 3.9(b)). Dürer pro ně neužívá názvy, a tak historikové matematiky rozebírají tyto postupy a vedou spekulace, zda se jedná o cykloidu, konchoidu, logaritmickou spirálu a další.[48] V části druhé popisuje metody konstrukcí pravidelných mnohostěnů a přibližné metody pro kvadraturu kruhu i trisekci úhlu pomocí kružítka a pravítka. Části třetí a čtvrtá jsou věnovány dalším tělesům – válci, polopravidelným mnohostěnům apod. Obsahují také Dürerovu teorii stínu a úvod do teorie perspektivy. V Dürerově *Underweysung* z roku 1525 najdeme dokonce konstrukci řezu kuželové plochy. Uvedená konstrukce (viz obr. 3.9) využívá metod běžně užívaných v deskriptivní geometrii při promítání na dvě k sobě kolmé průmětny.[49] Konstruoval i skutečnou velikost řezu. Dürerova konstrukce je správná a shodná s postupem, který bychom použili dnes, ale výsledný řez ve skutečné velikosti zakreslil chybně – přizpůsobil jej přesvědčení, že řezem je ovál s dolní částí širší a horní užší. Ve skutečnosti je řezem elipsa, což – jak jsme ukázali – ve starověku dobře věděli. Dürerovi patří ještě druhý spis, který je s prvním těsně spjat, *Vier Bücher von menschlicher Proportion (Čtyři knihy o lidských proporcích)* z roku 1528. Na rozdíl od prvního bývá historiky matematiky opomíjen, ačkoliv je neméně zajímavý.[50] Při nahlédnutí do spisu Daniela Barbaro z roku 1569[51] se nelze ubránit úvahám o tom, do jaké míry tehdy byly známy a využívány promítací metody (viz obr. 3.9). Na obrázku jsou i výborně zachycené představy o křivkách na ploše (s největší pravděpodobností jen intuitivně).

Také ve spisu Leckera[52] *Perspektiva Literaria* z roku 1567 jsou nakresleny zakřivené plochy s křivkami, které dnes nazýváme hlavními

[46] Dürer musel vytvořit nový německý slovník vědeckých termínů, jeho spis byl prvním geometrickým textem v němčině. Viz [Kat98, str. 391]. Druhé rozšířené vydání *Underweysung* vyšlo v roce 1538.

[47] Daniele Barbaro (1513–1570).

[48] Viz např. [Sch05], kde jsou i odkazy na další literaturu.

[49] Za počátek deskriptivní geometrie se ale běžně považuje až rok vydání Mongeovy přednášky 1795 – viz. strana 182.

[50] Viz [Sch05, str. 141].

[51] *La Pratica Della Perspettiva di Monsignor Daniel Barbaro*, Venetia, 1569, je k nahlédnutí ve studovně starých rukopisů v Národní knihovně v Praze.

[52] Hans Lencker (1530–1585) pocházel ze známé dynastie zlatníků a rytců a jeho práce najdeme v mnoha oblastech od smaltovaných nádob až po knihy. Z roku 1571 pochází spis *Perspektiva* a z roku 1567 *Pespektiva literaria*, jehož druhé vydání z roku 1595 je v národní knihovně v Praze.

křivkami plochy[53] (viz obr. 3.10). Tyto křivky až o více než 200 let později vyšetřoval G. Monge (viz odstavec 5.2.2).


ESSAY POVR LES CONIQVES

Obrázek 3.11: Pascalův *Essay povr les coniques*, 1640, [Scr00, str. 326]

3.2.2. „Projektivní“ pohled na kuželosečky

Z teorie perspektivy, která – jak jsme ukázali – byla v 16. století v centru pozornosti umělců a architektů, postupně vyrostla v první polovině století sedmnáctého projektivní geometrie. Například v roce 1613 v *Opticonem libri VI (Šesti knihách o architektuře)* d'Aiguillona[54] je rozebírána i stereografická projekce, popsaná poprvé Ptolemaiem (viz str. 36). Všechny však daleko předběhl francouzský inženýr, architekt a geometr Girard Desargues,[55] který položil základy projektivní geometrie jako samostatné disciplíny. V jeho první práci z roku 1636[56] byly

[53] Udávají směr extrémního zakřivení plochy v jejím bodě a tvoří ortogonální síť.

[54] Francois d'Aigullion (1566–1617).

[55] Girard Desargues (1591–1661).

[56] *Example de l'une des manières universelles... touchant la pratique de la perspective ... (Příklad jednoho z mnoha způsobů ... užití perspektivy ...)*, 1636, měla

poprvé uvedeny souřadnice bodu v prostoru. Desargues ale popsal bod třemi pravoúhlými souřadnicemi pro konstrukci perspektivního obrazu předmětu, nikoliv pro analytickou geometrii.[57] Projektivní pohled na kuželosečky přináší Desargues ve svém nejdůležitějším spise *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan (Koncept návrhu dosahu události střetu kužele s rovinou)*, který byl v malém počtu kopií vytištěn v Paříži v roce 1639.[59] V třicetistránkové práci Desargues doplňuje rovinu o nekonečně vzdálenou přímku a hyperboly i paraboly chápe jako uzavřené křivky protínající tuto přímku ve dvou bodech resp. dotýkající se jí. Asymptoty hyperboly potom představují tečnu v nekonečném bodě.

Projektivní geometrii Desarguese jeho současníci přijímali různě. Descartes o ni neprojevil zájem. Fermat ji vysoce ocenil, ale sám se touto problematikou nezabýval. Některé odradila už nevyhnutelnost ovládnout nový matematický jazyk Desarguese.[60] *Myšlenky Desarguese uchvátily tehdy snad jen jednoho matematika a tím byl Blaise Pascal, kterému ještě nebylo ani 17 let. Mladý Pascal obohatil projektivní geometrii o větu, kterou prý Desargues nazval „Velkou Pascalovou větou."* [Juš70, str. 124]

Svůj objev Pascal[61] publikoval (podobně jako dříve Desargues) v podobě letáku v cca padesáti exemplářích, které byly rozdány a rozeslány tehdejším učencům v Paříži roku 1640. Leták nesl název *Essay povr les coniques (Esej o kuželosečkách)* a vedle něj byly iniciály autora (viz obr. 3.11). Formulace Pascalovy věty tak, jak ji známe dnes,[62] se od formulace na letáku liší. Leták měl všeho všudy 53 řádků textu a neobsahoval důkazy. Pascal v letáku zdůrazňoval, že pomocí jeho věty a ještě

jen 12 stran.

[57] To udělal až Philippe de La Hire (1640–1718) roku 1679, který patrně jako první dospěl k rovnici plochy, a to v případě rotačního paraboloidu. S prostorovými souřadnicemi musel pracovat i Johann Bernoulli;[58] L'Hospital od něj totiž dostal dopis (publikovaný až 1742) s rovnicí geodetické křivky. Viz např. [Fuc99, str. 136–137].

[59] Ve své době se spis téměř ztratil, teprve v polovině 19. století objevil Michel Chasles (1793–1880) v pařížském antikvariátu jeho opis, který vytvořil P. De La Hire v roce 1679. V polovině dvacátého století byl objeven i tištěný exemplář – přetištěn v Paříži v roce 1951 R. Tatonem: *L'oeuvre Mathématique de G. Desargues* [Fuc99, str. 133]. De La Hire vydal v letech 1673, 1679 a 1685 tři spisy o kuželosečkách, v nichž na Desargues navázal a přidal k jeho teoriím nové věci. Těmto spisům se podrobně věnuje Šír, Z.: *Les sections coniques chez Philippe de La Hire.* PhD thesis, Universite Pierre et Marie Curie (Paris VI), Atelier national de Reproduction des Theses, 2002.

[60] Používal osobitou terminologii jím vymyšlenou a často přejatou z botaniky.

[61] Blaise Pascal (1623–1662).

[62] Pascalova věta: Průsečíky prodloužených stran šestiúhelníka kuželosečce vepsaného leží na jedné přímce.

dalších dvou s ní souvisejících je možné vybudovat celou teorii kuželoseček včetně vlastností tečen, průměrů, opsání kuželosečky danými body apod. Je známo, že po Pascalově smrti zůstaly rukopisy práce, ve které byla obsažena projektivní teorie kuželoseček. V roce 1676 viděl tyto rukopisy Leibniz, který píše v jednom dopise[63] o bohatém obsahu těchto rukopisů a konstatuje, že jsou natolik dokončeny, aby je bylo možno publikovat, ale publikovány nebyly a dosud nebyl rukopis nalezen.

Z Leibnizova dopisu lze usoudit, že B. Pascal svou větu dokázal nejdříve pro šestiúhelník vepsaný do kružnice a středovým promítáním větu zobecnil pro libovolnou kuželosečku. Vytištěná část byla známa i Descartesovi, který se měl údajně vyjádřit, že nemůže pocházet od šestnáctiletého mladíka. Tak vznikla legenda, že autorem rukopisu byl G. Desargues nebo E. Pascal – otec. Ale z roku 1644 pochází vytištěné svědectví – autorem je M. Mersenne, že B. Pascal z jedné obecné věty rozvinul celou Apolloniovu nauku o kuželosečkách. [Fuc99, str. 134]

3.2.3. Základy analytické geometrie

> *Algebraická rovnice se stala vztahem mezi čísly, což byl nový pokrok matematické abstrakce, který byl nutný pro obecné zpracování algebraických křivek.* D. J. Struik [Str63, str. 98]

Po velkém zájmu o geometrii ve starověku nastal na dlouho její téměř úplný útlum. Tento jev byl součástí celkového úpadku kultury po zániku západořímské říše v roce 476 po Kr. Teprve v posledních stoletích středověku dochází zvolna k obratu. Začínají se opět studovat speciální křivky, přičemž badatelé v počátcích v mnohém znovu objevují starořeckou matematiku, která se dochovala zejména díky arabskému světu. Prvním naprosto zásadním přínosem ke studiu křivek, kterým byl překonán odkaz starověkého Řecka, byly myšlenky francouzského učence René Descarta.

Descartes byl v prvé řadě filozofem. Myšlenky týkající se křivek jsou obsaženy v jeho korespondenci a zejména ve spisu *La Géométrie*, který byl vydán roku 1637 jako jeden z dodatků k jeho filozofickému dílu *Discours de la méthode (Rozprava o metodě)*,[64] o němž Struik říká:

[63] *Později Pascal sestavil – ale ne zcela dokončil – práci o kuželosečkách, jejíž rukopis se nedochoval. O existenci této práce víme z Leibnizova dopisu z 30. srpna 1676 Pascalovu synovci a z několika dochovaných fragmentů.* Viz [Juš76a, str. 254].

[64] Plný název: *Discours de la méthod pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences (Rozprava o metodě, jak správně vésti svůj rozum a hledati*

Stejně jako mnoho jiných velkých myslitelů 17. století hledal Descartes obecnou metodu myšlení, která by mohla usnadnit zkoumání a rozeznávání vědecké pravdy. [...] *Uveřejnil svou Géométrie jako příklad obecné sjednocující metody, v tomto případě spojující algebru a geometrii.* [Str63, str. 97]

Descartův spis *La Géométrie* bývá často považován za počátek tzv. analytické geometrie. Názory na tento problém se značně liší – někteří historikové matematiky přisuzují objev analytické geometrie Řekům, jiní trvají na tom, že o analytické geometrii lze mluvit teprve v 17. století v pojetí Descarta a Fermata.[65] Osobně se kloním k názoru druhému. Avšak otázka zrodu analytické geometrie je studována v řadě historických prací[66] a vzhledem k předmětu našeho studia není důležité ani účelné určit dobu vzniku analytické geometrie, ale podstatné pro nás bude alespoň stručně zmínit nejdůležitější aspekty, které formování nových myšlenek ovlivnily. Tyto otázky nelze vypustit, neboť úzce souvisejí se zcela novým pojetím křivek a způsobem jejich studia v 17. století.

Aby mohlo dojít ke vzniku analytické geometrie jako aplikace algebry na geometrii, musely být splněny především tři podmínky:

(1) musela být vypracována metoda souřadnic, aby bylo možno algebraicky popsat geometrický objekt (tj. v prvé řadě bylo nutno algebraicky popsat bod v rovině);

(2) nezbytným předpokladem byl rozvoj algebry a zejména zavedení jednoduché algebraické symboliky;

(3) musely se objevit otázky a problémy, které aplikaci algebry na geometrii vyžadovaly.

Užití souřadnic v konkrétních případech nacházíme už u řeckých matematiků ve starověku.[67] Všechno je ale popsáno výhradně geometrickým

pravdu ve vědách), Leiden, 1637. Práce obsahuje tři dodatky: *La Dioptrique, Les Météores, La Géométrie (Dioptrika, Meteory, Geometrie)*. Poprvé byla vydána ve francouštině (1637). První latinské vydání (1642), *Geometrii* vypouští. Latinský překlad *Geometrie* zhotovený pečlivě Franciskem van Shootenem vychází v roce 1649. Překlad byl vydán rovněž u Iana Maira v Leidenu a byl už doprovázen rozsáhlými vysvětlujícími výklady Florismonda de Beauna (1601–1652) a překladatele. Český překlad *Geometrie* dosud nevyšel. Viz [Fia98, str. 200–201].

[65] Např. Coolidge [Coo40, str. 117]: *I personaly defend, that analytic geometry was an invention of the Greeks.*; Nádeník [Fuc99, str. 135]: *Analytická geometrie se mohla objevit teprve tehdy, až algebra natolik vyspěla, že ji bylo možné spojit se souřadnicemi. To udělali R. Descartes a P. de Fermat přibližně v třetině 17. století, oba výlučně v rovině.* Diskuse této otázky také např. J. J. Gray v [Gra94, str. 852] a další.

[66] Např.: J. L. Coolidge, *The Origin of Analytic Geometry*, Osiris, Bruges, 1936.

[67] Už v Apollóniově spisu *Kuželosečky* se objevuje myšlenka, že pro kuželosečku lze uvažovat jisté osy (průměr a tečnu), vzhledem ke kterým mohou být studovány poměry vymezující její tvar.

způsobem pomocí poměrů a proporcí. Ačkoliv by se mohlo z dnešního pohledu zdát, že stačí vše „pouze přepsat do moderní symboliky“[68] a obdržíme silný nástroj (nejen) ke studiu libovolné rovinné křivky, jedná se ve skutečnosti o výrazný abstraktní krok, na který bylo třeba počkat ještě téměř osmnáct století.[69] Poznamenejme ještě, že myšlenka užití souřadnic se objevuje ve starověku také ve spojení s astronomií a s aplikací jejích poznatků v geografii při zavádění zeměpisné šířky a délky – např. Hipparchos (2. stol. př. Kr.).

Druhý předpoklad byl splněn mnohem později. První algebraické výsledky, které mají svůj počátek na konci „zlatého období řecké matematiky“ u Diofanta[70] a po něm v arabštině u al-Chwárizmího,[71] dostávají podněcující charakter až u italských matematiků na počátku 16. století.[72] Postupně z nich vznikají metody vedoucí k obecnému řešení kubické rovnice.[73] Rozvoj algebry byl úzce spjat se zavedením algebraické symboliky. V polovině šestnáctého století byla symbolika (až na malé změny) na úrovni Diofanta. Podstatný krok udělal až francouzský advokát a matematik François Viète (1540–1603), který mimo jiné také zdokonalil obecný zápis rovnic.[74]

[68] Struik [Str63, str. 97]: *Musíme si uvědomit, že už Apollónius měl prostředek k určení kuželoseček, který – podle Leibnize – nyní nazýváme souřadnicemi, a že jich též užil Pappus ve své sbírce a Analytickém pokladu, kde stačí pouze modernizovat symboliku, abychom obdrželi systematickou aplikaci algebry na geometrii.*

[69] Dnes lze obtížnost této abstrakce pozorovat při výuce u některých žáků gymnázií. Řekům v této abstrakci bránil zejména

- zákon homogenity (délky byly reprezentovány úsečkami, obsahy čtverci a objemy krychlemi, přičemž při operování s takovými veličinami bylo možno sčítat a odčítat jen veličiny „stejného druhu“, tj. délky s délkami, obsahy s obsahy a objemy s objemy);
- geometrická algebra a s tím spojená geometrická interpretace všech veličin, kdy nebylo možno uvažovat součin čtyř nebo více veličin (Pappus k tomu píše: *Nedlouho před námi se však někteří dohodli, že by se takové výrazy používat mohly, jenže neměli jasno, co by to mělo znamenat, když vynásobí obdélník čtvercem nebo jiným obdélníkem.* [Fia98, str. 209];
- absence algebraické symboliky.

[70] Diofantos (3. stol. po Kr.), nejvýznamnější práce *Aritmetika.*

[71] Abú ᶜAbdalláh Muhammad ibn Músa al-Chwárizmí (cca 780–850).

[72] Scipione del Ferro (1465–1526) a jeho žáci na univerzitě v Bologni.

[73] Niccolo Fontana Tartaglia (1499–1557), Girolamo Cardano (1501–1576) a další.

[74] *Viète ve svém spise* In artem analyticam isagoge (Úvod do analytického umění) *z roku 1591 zavedl tzv. „koeficienty“, tj. označení čísel písmeny. Vrátil se k myšlence, na které staří Řekové postavili svoji geometrickou algebru, přišel s tzv. zákonem homogenity; každá veličina měla svůj „rozměr“. Byly tedy veličiny délkové, plošné, prostorové atd.; Viète uvažoval celou hierarchii skalárů. Sčítat a odčítat bylo možno jen*

Téměř současně se naplnil i třetí z předpokladů, které pokládáme za nezbytné pro další pokrok ve sledované oblasti. Jedny z prvních požadavků na matematický popis mechanického pohybu se objevují v souvislosti s konstrukcemi kolečkových hodin a složitých orlojů. Vedle mechanických hodin tu byla otázka popisu planetárních pohybů, zkoumání pohybu v gravitačním poli[75] apod.

Tento postupný proces, který byl daleko složitější, než jsme stručně naznačili, vedl k tomu, že se v 17. století dvěma učencům – R. Descartovi[76] a P. de Fermatovi[77] – podařilo algebraicky popisovat geometrické objekty. Ačkoliv ani Descartův ani Fermatův přístup nebyl abstraktní, lze v jejich pojetí poprvé mluvit o vytvoření analytické geometrie jako dostatečně obecné metody k řešení geometrických problémů.[78]

Z korespondence s francouzským matematikem Mersennem[79] víme, že Fermatova práce *Ad locos planos et solides isagoge (Úvod do teorie rovinných a prostorových míst)* byla napsána jistě již roku 1636, ale Fermat sám ji nikdy nevydal. Byla vydána teprve posmrtně jeho synem (1679). A tak prvenství v publikaci myšlenek analytické geometrie připadlo René Descartovi, který v roce 1637 vydal již zmiňovaný spis *La Géométrie.*[80]

---

veličiny stejného rozměru, při násobení se „rozměry sčítaly", tj. např. součinem veličiny délkové a plošné byla veličina prostorová. Známé veličiny reprezentoval souhláskami, neznámé veličiny samohláskami (známých veličin je více, neznámých méně). Mocniny neznámé veličiny A označoval A, A quadratum, A cubus, A quadrato – quadratum atd., mocniny známé veličiny B zapisoval B, B plano, B solido, B plano – plani atd. Zavedení koeficientů bylo obrovským pokrokem, nicméně symbolika byla velmi toporná. [. . .] *Zjednodušení Viètovy symboliky přinesli T. Harriot (1560–1621) v knize* Artis analyticæ praxis (Užití analytického umění) *a William Oughtred (1574–1660) v knize* Clavis mathematicæ (Klíč matematiky)*; obě vyšly kolem roku 1631. René Descartes přišel s dalším výrazným zjednodušením symboliky;* [Bečˇ98, str. 29–30].

[75] Tycho de Brahe (1546–1601), Johannes Kepler (1571–1630). Podrobněji viz např. [Fol86, str. 89].

[76] René Descartes (1596–1650).

[77] Pierre de Fermat (1601–1665).

[78] *Teprve Descartovo (1637) a Fermatovo (1636/1679) pojetí analytické geometrie – jako metody řešení geometrických problémů vhodně vytvářenými algebraickými vztahy, jejich algebraickým řešením a zpětnou geometrickou interpretací je již dostatečně obecné, aby se mohlo stát všeobecně užívanou matematickou metodou.* Viz [Fol86, str. 92].

[79] Marin Mersenne (1588–1648).

[80] Poznamenejme ještě, že Descartes měl rozmyšleny podstatné části svého spisu již koncem dvacátých let 17. století (jak vyplývá z jeho korespondence), ale když se roku 1633 dozvěděl o odsouzení Galileo Galilea (1564–1642) římskou inkvizicí, stalo se to patrně důvodem k pozdržení vydání tohoto spisu až do roku 1637. Descartovy spisy se dostaly na index až roku 1663. Viz [Fuc99, str. 135].

Nastínili jsme stručně v jakých souvislostech vznikala Descartova *La Géométrie*, nyní se tomuto spisu a souvisejícím oddílům Descartovy korespondence budeme věnovat podrobněji z hlediska studia křivek.

3.3. Křivky v Descartově *La Géométrie*

> *V dějinách filosofie novověké zaujímá Descartes tedy postavení vysoce důležité, ale v moderní nauce filosofické místo jen podřízené; a vzdělaný svět nanejvýš z něho cituje výrok fundamentální „cogito, ergo sum!“.*
> *Jak jinak vypadá sláva jeho mathematická a vůbec v oboru věd exaktních získaná! Této s počátku sporé a málo chápané záslužnosti vědecké přibývalo v témže poměru, v jakém se uskrovňovalo uznávání jeho zásluh filosofických.*
> [Stu97, str. 73]

Descartova *La Géométrie* (dále jen *Geometrie*)[82] je rozdělena do tří částí:

- *Livre Premier: Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites* (Kniha první: O úlohách, které je možno sestrojit pouhým užitím kružnic a přímek), str. 297–314;
- *Discours Second: De la nature des lignes courbes* (Pojednání druhé: O povaze křivek), str. 315–369;
- *Livre Troisiesme: De la construction des problesmes solides, ou plusque solides* (Kniha třetí: O konstrukci úloh tělesných[83] a více než tělesných), 370–413.

Kniha první: O úlohách, které je možno sestrojit pouhým užitím kružnic a přímek

V první knize jsou zavedeny základní termíny a vysvětlovány principy používané v dalších částech. Descartes provádí zjednodušení symboliky, které bylo pro snadnější práci s algebraickými výrazy nezbytné. Na rozdíl od svých předchůdců používá malá písmena – známé „délky“ značí písmeny z počátku abecedy a, b, c, ..., neznámé písmeny z jejího konce

[82] Výchozím textem pro nás bude přetisk Descartovy *La Géométrie* z roku 1954 [Des37]. Svazek obsahuje faksimile prvního francouzského vydání z roku 1637 s anglickým překladem a množstvím komentářů. Budeme se proto odkazovat přímo na čísla stránek prvního francouzského vydání, toto číslování je zachováno také v přetisku.

[83] Dnes bychom řekli *O konstrukci úloh kubických* ...

x, y, ..., zjednodušuje zápis mocnin.[84] Zásadním krokem pak bylo oproštění se od zákona homogenity, čímž odstranil Descartes potíže, které přecházely do algebraických výrazů z geometrické algebry starých Řeků (viz pozn. 69 na str. 104).

Pro Descarta byla geometrie vědou o řešení a konstruování geometrických problémů.[85] Svoji metodu řešení geometrických úloh komentuje v *Geometrii* slovy:

Chceme-li řešit nějakou úlohu, pak předpokládáme, že už je vyřešena, a pojmenujeme všechny úsečky, které se zdají být potřebné k sestrojení této úlohy, a to jak ty, které jsou neznámé, tak ostatní. Pak, aniž bychom hleděli na nějaké rozdíly mezi těmito známými a neznámými úsečkami, je třeba se vypořádat s potíží, podle toho řádu, který ukazuje nejpřirozeněji, jakým způsobem závisejí jedny na druhých, až nalezneme způsob vyjádření jedné a téže veličiny dvěma způsoby: to je to, co se nazývá rovnicí, neboť členy získané jedním z těchto dvou způsobů jsou rovny členům získaným způsobem druhým. A je třeba najít tolik takových rovnic, kolik je neznámých. [Des37, str. 300]

Klíčová úloha, na které Descartes svoji metodu demonstruje a která provází celou knihu, je tzv. *Pappův problém* nalezení geometrického místa bodů majících určitý poměr vzdáleností ke čtyřem daným přímkám. Pappus se zmiňuje o tom, že pokud jsou zadané přímky čtyři, pak toto geometrické místo je kuželosečka (viz obr. 3.12), což věděl už Apollónius a některé speciální případy této úlohy znal pravděpodobně i Eukleides.[86] Descartes cituje Pappa:

Bude-li však přímek více než čtyři, bude se tento bod nacházet na místech náležejících k počtu dosud neznámých, které se prostě nazývají liniemi (křivkami, grammé) a o jejichž povaze a vlastnostech není nic

[84] Srovnejme Viètův a Descartův zápis výrazu $x^3 + 3b^2x = 2z^3$:
Viète (podle [Bečˇ98, str. 30]):

$$A \text{ cubus} + B \text{ plano } 3 \textit{ in } A \text{ æquari } Z \text{ solido } 2$$

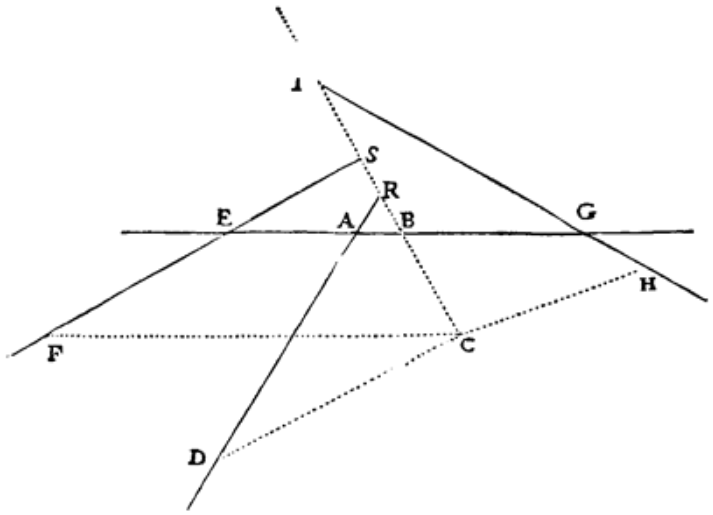
Descartes (analogicky podle stran 301, 303 v [Des37]):

$$x^3 + 3bbx \propto 2z^3.$$

Poznamenejme ještě, že terminologie užívaná Descartem zřetelně naznačuje geometrický původ. Termíny pro mocniny jsou převzaté z řečtiny – užívá termín *le carré* pro druhou, *le cube* pro třetí, *le carré de carré* pro čtvrtou mocninu atd.

[85] Descartův dopis Beckmannovi z 26. 3. 1619 [Ada08, svazek X, str. 157].

[86] Viz [Des37, str. 304–305]. Poznamenejme pouze, že v některých případech – např. čtyři vzájemně rovnoběžné přímky – obdržíme singulární kuželosečku.



Obrázek 3.12: Pappův problém „geometrického místa bodů ke čtyřem přímkám“:
znázorněný v Descartově *Geometrii* [Des37, str. 309].

Formulujme tento problém dnešními slovy: Jsou dány přímky $p_1(\equiv AB)$, $p_2(\equiv AD)$, $p_3(\equiv EF)$, $p_4(\equiv GH)$ a čtyři úhly $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$. Je třeba najít množinu všech bodů C tak, aby přímky $q_1(\equiv CB)$, $q_2(\equiv CD)$, $q_3(\equiv CF)$, $q_4(\equiv CH)$ vedené z bodu C protly po řadě přímky $p_1, \ldots, p_4$ pod příslušnými úhly $\alpha_1(\equiv CBA)$, $\alpha_2(\equiv CDA)$, $\alpha_3(\equiv CFE)$, $\alpha_4(\equiv CHG)$, a byla splněna podmínka

$$\frac{d_1 \cdot d_3}{d_2 \cdot d_4} = \frac{\alpha}{\beta}, \tag{3.5}$$

kde $\frac{\alpha}{\beta}$ je konstanta, $d_1, \ldots, d_4$ jsou délky úseček ležících na přímkách $q_1, \ldots, q_4$. Tyto úsečky jsou ohraničeny bodem C a po řadě body $p_1 \cap q_1$, $p_2 \cap q_2$, $p_3 \cap q_3$, $p_4 \cap q_4$.

známo. [...] *Bude-li přímek více než šest, pak už nelze hovořit o daném vztahu něčeho omezeného čtyřmi úsečkami k tomu, co je omezeno jinými, protože neexistuje nic, co by obsahovalo více než tři rozměry.* [Des37, str. 304–305]

Descartes nejprve ukazuje postup na jednom příkladu čtyř daných přímek (viz obr. 3.12) a poté, co předvedl svoji metodu na tomto příkladě, Descartes říká, že je možno ji užít bez problému na libovolný počet přímek.[87] Bez dalšího podrobného vysvětlování provádí klasifikaci jednotlivých případů Pappova problému [Des37, str. 313–314]. Jeho výsledky lze shrnout do následující tabulky:

Klasifikace jednotlivých případů zobecněného Pappova problému zohledňující konstruovatelnost hledané množiny bodů

Počet daných přímek	m je stupeň x v rovnici[88]	Konstrukce bodů hledané množiny
3,4, nebo 5 (ale ne 5 rovnoběžných)	$m \leq 2$	body lze sestrojit pomocí pravítka a kružítka[89]
5 rovnoběžných, 6, 7, 8 nebo 9 (ale ne 9 rovnoběžných)	$m \leq 4$	body lze vždy sestrojit jako průsečíky kuželoseček, ve speciálních případech pomocí pravítka a kružítka
9 rovnoběžných, 10, 11, 12 nebo 13 (ale ne 13 rovnoběžných)	$m \leq 6$	konstrukci nelze obecně provést užitím kuželoseček, musí být použita komplikovanější křivka[90]
atd.		

[87] Pappova úloha pro n přímek formulována dnešními slovy: Je dáno n přímek, $l_1, l_2, \dots l_n$ a n úhlů, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$. Z libovolného bodu C vedeme n přímek, $k_1, k_2, \dots k_n$, tak, aby k_i svírala s l_i úhel α_i. Průsečík označme B_i a délku úsečky CB_i označme d_i. Dána je navíc konstanta λ a v případě n lichého ještě jedna délka a. Máme najít geometrické místo (množinu) těch bodů C, pro něž platí:

1. Je-li n liché, $n = 2m - 1$, pak $d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_m = \lambda \cdot d_{m+1} \cdot d_{m+2} \cdot \dots \cdot d_{2m-1} \cdot a$
2. Je-li n sudé, $n = 2m$, pak $d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_m = \lambda \cdot d_{m+1} \cdot d_{m+2} \cdot \dots \cdot d_{2m}$.

[88] Jedná se o rovnici hledané množiny. V případě rovnoběžných přímek bude m stupeň y.

[89] Na stranách 302–303 [Des37] Descartes ukazuje, že pokud může být nějaká úloha řešena pomocí pravítka a kružítka, pak uvedený postup vede ke kvadratické rovnici a obráceně ukáže, jak kořeny kvadratické rovnice najít geometrickou konstrukcí užívající jen pravítka a kružítka.

[90] Grafickému řešení algebraických rovnic se podrobně věnuje ve třetí knize, kde

Náhle Descartes opouští výklad Pappova problému, aniž by se věnoval odvozeným vztahům pro délky úseček $d_1(\equiv CB)$, $d_2(\equiv CD)$ $d_3(\equiv CF)$, $d_4(\equiv CH)$ vzhledem k podmínce (3.5) – viz obr. 3.12. Píše, že musí něco říci o křivkách obecně.

Proč? Na první pohled se může zdát toto přerušení nečekané, ale pokud se zamyslíme nad dosavadním Descartovým postupem pozorněji, uvědomíme si přirozenost tohoto odbočení. Descartes se totiž v tomto okamžiku dostal za hranice do té doby známých křivek. Jak jsme ukázali v předchozím textu, až dosud nebylo konstruovatelných křivek známo mnoho. V podstatě kromě přímky, kružnice a kuželoseček, to bylo jen několik speciálních křivek. Descartes si musel uvědomit, že zobecněním Pappova problému obdrží zatím nepopsané křivky, což ho nevyhnutelně přivedlo k hlubokým úvahám nad tím, jaké křivky bude vlastně akceptovat v geometrii. Přerušil výklad Pappova problému a ukončil knihu první, aby vyřešil tuto otázku a vzápětí se k řešení Pappova problému vrátil.

Pappův problém metodami dnešní analytické geometrie

Současnými metodami analytické geometrie bychom tento problém řešili patrně zcela jinak. Zavedli bychom pravoúhlý (obecně libovolný) systém souřadnic $\langle O, x, y\rangle$. Vzhledem k tomuto souřadnému systému musí hledaný bod $C[x, y]$ ležet na průsečíku přímek

$$\begin{aligned} q_1(\equiv CB): &\quad a_1x + b_1y + c_1 = 0,\\ q_2(\equiv CD): &\quad a_2x + b_2y + c_2 = 0,\\ q_3(\equiv CF): &\quad a_3x + b_3y + c_3 = 0,\\ q_4(\equiv CH): &\quad a_4x + b_4y + c_4 = 0. \end{aligned}$$

Vyjádřit rovnice přímek $q_1, \ldots, q_4$, které mají s danými přímkami $p_1, \ldots, p_4$ svírat úhly $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ není obtížné (jen trochu pracné). Potom lze vyjádřit souřadnice bodů B, D, F, H a pomocí těchto souřadnic obdržíme podmínku 3.5 ve tvaru

$$\frac{|CB| \cdot |CF|}{|CD| \cdot |CH|} = \frac{\alpha}{\beta}\ . \tag{3.6}$$

Descartův postup je jednodušší, což budeme mít možnost posoudit zejména v druhé knize, kde v řešení Pappovy úlohy pokračuje. Nutno znovu

ukazuje, jak lze kořeny rovnic 5. a 6. stupně najít jako průsečíky kružnice a konkrétní křivky třetího stupně – tzv. *Descartovy paraboly* (viz strana 120).

poznamenat, že těžko lze v Descartově řešení hledat souřadný systém v dnešním pojetí. Všechny veličiny – známé i neznámé – chápe výhradně jako délky úseček či poměry. Vyjadřuje vztah mezi neznámými veličinami principem odpovídajícím řecké tradici, tj. na základě poměrů v trojúhelnících vytvořených danými i hledanými přímkami. Pokud bychom trvali na analogii se souřadným systémem, pak by obrázek 3.12 odpovídal kosoúhlému systému souřadnic se středem v bodě A, $x \equiv AB$, y je přímka rovnoběžná s BC. Znovu však zdůrazňuji, že řešení této úlohy zavedením orientovaných souřadnicových os stojí na jiném principu, jak jsme ukázali výše.[91]

Pojednání druhé: O charakteru křivek

Druhou knihu Descartovy *Geometrie* je možno rozdělit do čtyř částí:

V první se Descartes zabývá otázkou, které křivky by měly být zahrnuty do geometrie a zavádí klasifikaci křivek. V části druhé se vrací k Pappovu problému, který začal diskutovat v první knize; provádí kompletní analýzu Pappova problému pro čtyři přímky a probírá speciální případ Pappova problému pro pět přímek. Ve třetí části prezentuje metodu nalezení tečny (přesněji řečeno nejprve normály) ke křivce. Ve čtvrté části užije geometrické metody k nalezení křivek určitých speciálních dioptrických vlastností. S ohledem na vytyčené téma rozebereme podrobněji zejména první dvě části.

Hned v úvodu druhé knihy při diskusi otázky, které křivky by měly být zahrnuty do geometrie, Descartes odmítá starověké rozdělení křivek na *geometrické* – přímka, kružnice – a *mechanické* – spirála, konchoida, kvadratrix atd. Píše:

Staří si dobře všimli, že úlohy geometrie jsou zčásti rovinné (plans), zčásti tělesné (solides) a zčásti křivkové (lineaires), to znamená jedny, které lze konstruovat pouze pomocí přímek a kružnic, druhé, v nichž se použije aspoň jedna kuželosečka, zatímco třetí vyžadují použití nějaké složitější křivky. Divím se však, že u těchto složitějších křivek nerozlišovali rozličné stupně, a nechápu, proč je označovali jako mechanické a nikoli geometrické. Neboť kdyby chtěli říct, že je tomu tak proto, že je k jejich nakreslení zapotřebí určitých přístrojů, pak by se musely z téhož

[91] Na základě zavedení kosoúhlého souřadného systému interpretuje Descartovo řešení Juškevič [Des53, str. 608–609]. Ovšem při snaze vyjádřit Pappův problém moderním jazykem není striktně rozlišováno, kdy je označením $d_1, \ldots, d_n$ míněna délka úsečky a kdy se jedná o přímky.

důvodu odmítnout i kružnice a přímky, neboť přece i ty kreslíme na papír pomocí kružítka a pravítka, které lze právě tak označit za přístroje. [Des37, str. 315]

Potom Descartes přistupuje k vlastnímu vymezení křivek, které považuje za geometrické:

Abych nakreslil všechny ty křivky, které zde hodlám zavést, nepotřebuji už žádný další předpoklad kromě toho, že je možné pohybovat současně dvěma nebo více přímkami a že jejich průsečíky vyznačují jinou křivku. [Des37, str. 316]

O něco dále blíže specifikuje pohyb přímek a geometrickými nazývá ty křivky, které

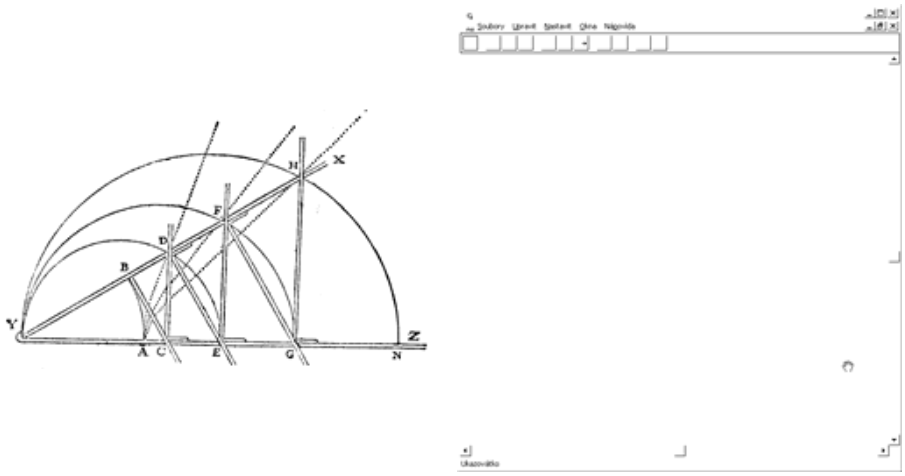
[...] *jsou opsány spojitým pohybem nebo několika takovými pohyby, z nichž následující jsou plně určeny předcházejícími.* [Des37, str. 316]

Tímto upřesněním oddělil křivky jako spirálu, kvadratrix apod., které lze sice také opsat spojitými pohyby, ale tyto pohyby budou na sobě nezávislé. Tím Descartes vymezil jako ***geometrické*** ty křivky, které dnes nazýváme *algebraickými*. Ostatní křivky označuje jako ***mechanické***, dnes je nazýváme *transcendentní*.[92] Pojmy *algebraické* a *transcendentní* pocházejí až od Leibnize.[93]

Podívejme se na Descartovu intuitivní definici geometrické křivky podrobněji. S dnešního pohledu se toto vymezení zdá velmi přirozené, vždyť nástrojem jeho metody byla algebra. Ale tvrzení, že křivky opsané *spojitým pohybem nebo několika takovými pohyby* [...], jsou právě al-

[92] Ve své úvaze nad tím, proč nebyly ve starověku zkoumány algebraické (v Descartově označení geometrické) křivky znovu komentuje vymezení křivek, kterými se zabývá:
Možná to, co bránilo starým geometrům přijmout křivky, které jsou složitější než kuželosečky, bylo, že ty křivky, které zkoumali jako první po kuželosečkách, byly zrovna spirála, kvadratrix a jim podobné, které skutečně náležejí ke křivkám mechanickým a v žádném případě ne k těm, které jsem si zde předsevzal poznávat, neboť tyto křivky lze opsat pouze dvěma oddělenými pohyby, které se nenacházejí v žádném přesně měřitelném vztahu. [Des37, str. 316–317]

[93] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) nazval v roce 1684 geometrické křivky Descarta algebraickými a mechanické transcendentními – viz str. 174.



Obrázek 3.13: Descartovo mechanické zařízení pro vykreslování křivek. Při rozevírání úhlu XYZ otáčením pravítka XY opisují body D, F, H, ... křivky stále vyšších stupňů:
◀ Obrázek „pravítkového“ zařízení (*instrument*) z Descartesovy *Geometrie* [Des37, str. 318]
▶ totéž zařízení sestrojené v Cabri Geometrii.

gebraické křivky v dnešním pojetí,[94] bylo dokázáno teprve roku 1876.[95] Ačkoliv Descartes používá algebraické rovnice jako nástroj, nikde v jeho *Geometrii* nenajdeme algebraickou rovnici uvažovanou jako přímou reprezentaci křivky. Nabízí se také zamyšlení nad tím, proč „definoval“ křivky právě pomocí spojitého pohybu. Viděli jsme, že Pappův problém vyřešil Descartes konstrukcí libovolně mnoha bodů hledané množiny. Z jeho textu však vyplývá, že takovou bodovou konstrukci křivky považuje za uspokojivou jen v případě, kdy konstruovaná křivka je sama

[94] V dnešní terminologii jsou *algebraické rovinné křivky* (Descartes v *Geometrii* uvažuje jen rovinné křivky) právě takové křivky, jejichž každý bod $X[x, y]$ je řešením rovnice

$$F(x, y) = 0, \qquad (\star)$$

kde $F(x, y)$ je polynom n-tého stupně dvou proměnných x, y (tj. algebraické rovnice) a žádný jiný bod není řešením této rovnice. Naopak každá rovnice typu $(\star)$ popisuje právě takovou křivku, kterou Descartes považuje za geometrickou.

[95] Tvrzení dokázal v roce 1876 A. B. Kempe (viz [Kem76]). Dnes lze toto tvrzení zformulovat jako jednu z hlavních vět kinematických mechanismů: *Pomocí rovinných kloubových mechanismů, ve kterých pohyb předchozích článků určuje pohyb následujících, je možno konstruovat oblouky libovolných algebraických křivek, ale nelze sestrojit ani jednu transcendentní.* Viz [Des53, str. 552].

řešením problému. Pokud má být křivka použita jako prostředek pro hledání řešení, tj. pokud má např. sloužit k hledání průsečíků s jinou křivkou, pak bodovou konstrukci považoval za nedostatečnou. Vykreslení křivky spojitým pohybem ve výše uvedeném smyslu názorně ukazovalo, že průsečík existuje, patrně proto dal Descartes tomuto způsobu vymezení geometrických křivek přednost.

Zdá se, že Descartes jako první řešil problém *jakým způsobem specifikovat novou křivku*. Podrobněji se k této otázce vrátíme v závěru. Než se začneme zamýšlet hlouběji nad Descartovým pojetím křivek, přiblížíme nejdříve ještě některé další části Descartovy *Geometrie*.

Poté, co provedl vymezení křivek, jimiž se bude zabývat, předvádí, co chápe *geometrickou* křivkou na zařízení, které sestrojil již v letech 1619–21.[96] Toto zařízení (viz obr. 3.13) tvoří pravítka, která se při rozevírání úhlu XYZ pohybují tak, že pohyb každého z pravítek BC, CD, DE, EF, FG, ... je závislý na pohybech všech předcházejících pravítek. Body D, F, H, ... opisují křivky stále vyšších stupňů – v závislosti na počtu pravítek. O těchto křivkách Descartes říká:

Nevidím důvod, proč by nemohly být pojmuty stejně čistě a přesně jako kružnice nebo přinejmenším jako kuželosečky [...] *a nevidím důvod, proč by neměly být používány stejným způsobem pro řešení geometrických problémů.* [Des37, str. 318–319]

Potom pokračuje tím, že může podat několik dalších způsobů k vykreslení křivek, kdy každá další křivka bude složitější než předchozí, ale za nejlepší cestu, jak klasifikovat křivky považuje udělat to na základě toho faktu, že

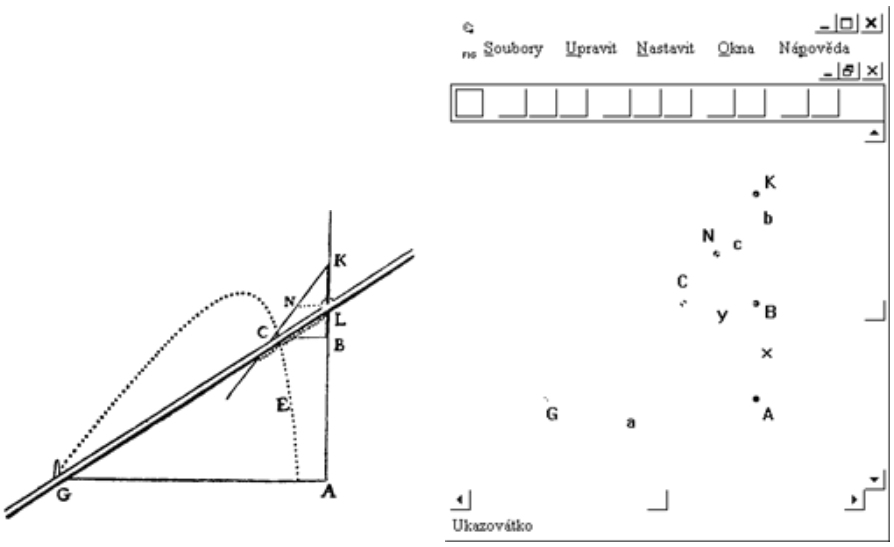
všechny body těch křivek, které lze nazvat geometrickými, to jest těch, které spadají pod nějakou přesnou a exaktní míru, měly nutně nějaký vztah ke všem bodům nějaké přímky, který může být vyjádřen nějakou rovnicí, jednou a touž pro všechny body křivky. [Des37, str. 319]

Na stranách 319–324 [Des37] Descartes zavádí a vysvětluje klasifikaci křivek podle tzv. ***genre***. Tento výraz budeme překládat dále jako ***rod*** křivky.[97] Rod křivky odpovídá minimálnímu počtu pohyblivých pravítek

[96] Toto zařízení je popsáno v *Cogitationes privatae* – viz [Ada08, svazek X, str. 234–240].

[97] V [Des37] je v anglickém překladu užito termínu *class*, kterému by odpovídal český termín *třída*. Stejně překládá *genre* Bos: *I shall translate "genre" with "class"* [Bos81, str. 301]. Budu se držet českého termínu *rod*, který používá Folta [Fol86] a který odpovídá také i výrazu *rod* v ruském vydání Descartovy *La Géométrie* [Des53]. Coolidge v *History of geometrical methods* [Coo40, str. 126] termín *genre* nepřekládá.

u zařízení vytvářejícího křivku (za předpokladu, že všechna pravítka jsou „rovná“, tj. reprezentují část přímky, ale tuto skutečnost Descartes neuvádí).



Obrázek 3.14: Descartovo mechanické zařízení vykreslující větev hyperboly
◄ znázorněné v Descartově *Geometrii* [Des37, str. 320];
► sestrojené v Cabri Geometrii.

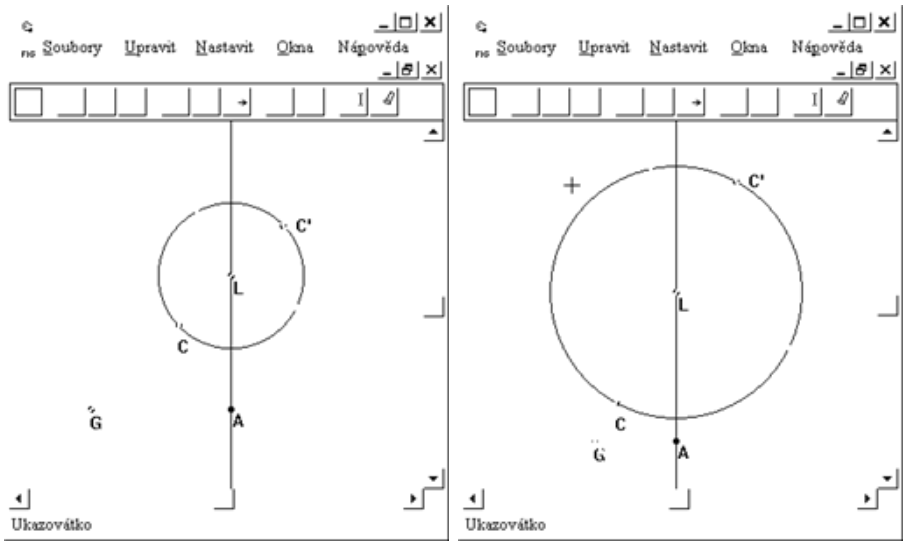
Zařízení na obr. 3.13 popisuje jen určitý typ pohybů, ale Descartes demonstruje na dalším zařízení (viz obr. 3.14), že měl na mysli daleko širší spektrum pohybů. Popisuje křivku, která je generována průsečíkem C pohybujících se přímek $g(\equiv GL)$, $k(\equiv NK)$ (viz obr. 3.14). Přímku $g(\equiv GL)$ reprezentuje pravítkem upevněným v bodě G. Otáčením pravítka se iniciuje pohyb daného pravoúhlého trojúhelníka NKL (s pravým úhlem při vrcholu L) podél přímky $x(\equiv AB)$, $KL \in x$, přičemž přepona trojúhelníka je incidentní s přímkou $k(\equiv NK)$.

Descartes označuje jako neznámé veličiny $y = CB$ a $x = AB$, jako známé veličiny (tj. konstanty) odvěsny pravoúhlého trojúhelníka $KL = b$, $NL = c$ a vzdálenost $GA = a$. Potom odvodí rovnici křivky generované průsečíkem $C[x, y]$ dvou pohybujících se přímek $g(\equiv GL)$, $k(\equiv NK)$

$$y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac. \tag{3.7}$$

Pro nás není teď podstatné komentovat Descartův podrobný postup

odvození rovnice.[98]

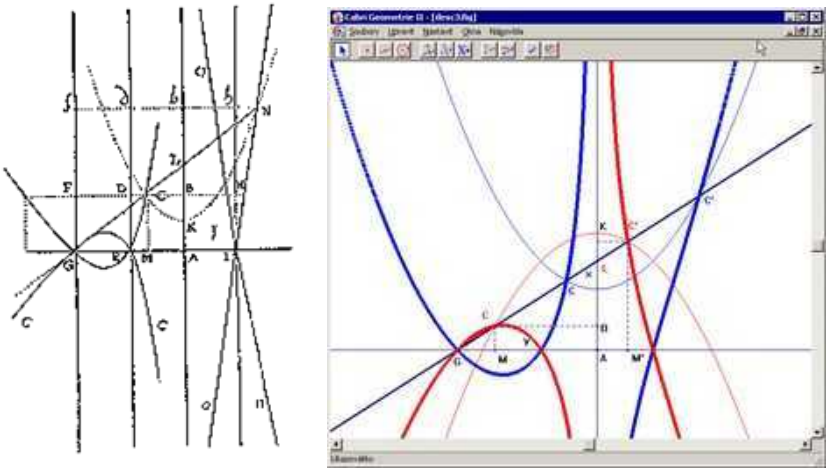


Obrázek 3.15: Nikomedova konchoida sestrojena v Cabri Geometrii postupem, který popisuje Descartes. V Descartově Geometrii obrázek není uveden.

Z rovnice lze vidět, píše Descartes, že se jedná o hyperbolu, křivku rodu jedna. Dále poznamenává, že pokud přímku $k(\equiv NK)$ incidentní s přeponou trojúhelníka NKL v tomto zařízení zaměníme za křivku rodu jedna – kuželosečku, výsledná křivka bude rodu dva (tj. křivka třetího nebo čtvrtého stupně v dnešní terminologii – viz následující tabulka). Odtud můžeme usuzovat, že přímce nepřiřazuje rod. Konkrétně píše, že pokud uvažujeme místo přímky $k(\equiv NK)$ kružnici se středem L, obdržíme „konchoidu starých“. Tím má Descartes na mysli křivku, kterou dnes nazýváme Nikomédova konchoida – (viz obr. 3.15). V případě, že budeme uvažovat parabolu s osou KB, obdržíme *první a nejjednodušší křivku, která řeší Pappův problém pro pět daných přímek* [Des37, str. 323] – viz obr. 3.16. Podrobněji se k této křivce, jak ukážeme dále, vrací pak až na str. 335.

Vše je završeno na stranách 323–324 klasifikací křivek, která je založena na geometrických principech (srovnej s tabulkou na straně 110). Klasifikace podle stupně algebraické rovnice pochází až od Newtona (viz

[98] Viz [Des37, str. 321–322].



Obrázek 3.16: Descartem popsaná křivka, která je řešením Pappova problému „geometrického místa bodů k pěti daným přímkám“:
◄ znázorněná v Descartově *Geometrii* [Des37, str. 336];
► sestrojená v Cabri Geometrii.

pozn. 99). Descartovy výsledky lze shrnout do následující tabulky:

Křivky rodu 1	lze vyjádřit rovnicí stupně ≤ 2	jsou řešením Pappova problému pro 3 nebo 4 přímky
Křivky rodu 2	lze vyjádřit rovnicí stupně ≤ 4	jsou řešením Pappova problému pro 5, 6, 7 nebo 8 přímek
Křivky rodu 3	lze vyjádřit rovnicí stupně ≤ 6	jsou řešením Pappova problému pro 9, 10, 11 nebo 12 přímek
atd.		

Tím zobecnil výsledky, které obdržel při řešení Pappova problému pro 3 a 4 přímky do tvrzení:

> Křivky rodu r lze vyjádřit rovnicí stupně max. $2r$ a jsou řešením Pappova problému pro max. $4r$ daných přímek.

Výsledek, který obdržel pro 3 a 4 přímky je správný, v obou případech je hledanou množinou bodů kuželosečka, ale pro vyšší počet daných přímek toto zobecnění neplatí! Tím zavedl Descartes chybnou klasifikaci křivek vyšších stupňů. Jeho nástupci to nerozpoznali, správnou klasifikaci provedl až Newton.[99]

[99] Isaac Newton (1643–1727) podává jako první důkaz, že Descartova klasifikace je

Descartes dále říká, že je nezbytné ukázat konkrétně metodu, jak nalézt křivku a ukazuje to na případě čtyř daných přímek (viz obr. 3.12), který rozpracoval již v první knize na stranách 309–312 [Des37]. Pokračuje vyjádřením rovnice hledané množiny bodů, tj. množiny pro kterou

součin CB a CF je ekvivalentní součinu CD a CH. To je totéž jako říct, že pokud

$$\begin{aligned} CB &= y, \\ CD &= \frac{czy + bcx}{z^2}, \\ CF &= \frac{ezy + dek + dex}{z^2}, \end{aligned}$$

a

$$CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2},$$

pak rovnice je

$$y^2 = \frac{(cfglz - dekz^2)y - (dez^2 + cfgz - bcgz)xy + bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}.$$

Viz [Des37, str. 325].

Potom Descartes zavede substituce

$$2m = \frac{cflgz - dekz^2}{ez^3 - cgz^2}, \ \frac{2n}{z} = \frac{dez^2 + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgz^2},$$

čímž rovnici zjednoduší a vyjádří jeden její kořen[100]

$$y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 - \frac{2mnx}{z} + \frac{n^2x^2}{z^2} + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}}.$$

Dalšími substitucemi obdrží výraz

$$y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2}. \tag{3.8}$$

nesprávná. Podrobně se touto otázkou zabývá H. J. M. Bos v dodatku článku [Bos81]. V letech 1667–68 provedl Newton klasifikaci křivek 3. stupně (publikováno až 1704), části výsledků dosáhl již kocem roku 1664 – viz část 4.3.

[100] Descartes zmiňuje jen jeden kořen, ačkoliv má rovnice kořeny dva. Druhý kořen by pochopitelně také vyjadřoval kuželosečku.

Provádí diskusi, který typ kuželosečky (parabolu, elipsu, hyperbolu a kružnici) dostane při jakých hodnotách parametrů $m,\ n,\ o,\ p$ v rovnici 3.8. Určuje střed a délku dvou sdružených průměrů, tj. přesnou polohu středových kuželoseček. Ačkoliv přímce nepřiřadil rod, jak jsme poznamenali na straně 117, nelze tvrdit, že by se v jeho *Geometrii* vůbec nevyskytovala rovnice přímky. Na str. 328 [Des37] píše, že pokud odmocnina $\sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2}$ bude rovna nule, pak je evidentní, že bod C by ležel na přímce. Nikde ve své knize se ovšem nezabývá tvrzením, že každá lineární rovnice znamená přímku. Tuto větu publikoval až první Descartův komentátor Florimond de Beaune (viz pozn. 64).

Dále poznamenává, že podle udaného příkladu lze řešit jakýkoliv jiný případ.

Vrací se podrobněji ke křivce, kterou zmiňoval na str. 322 [Des37] v souvislosti s mechanickým zařízením, tj. ke křivce, kterou nalezl jako řešení Pappovy úlohy pro pět daných přímek, z nichž čtyři jsou ekvidistantní a pátá k nim kolmá (viz obr. 3.16). Určil její rovnici

$$y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy. \tag{3.9}$$

Později byla tato křivka třetího stupně nazývána ***Descartova parabola*** nebo ***kubická parabola*** nebo také ***trident***.[101]

Zde si Descartes zřejmě uvědomil, že nezná způsob, jak vykreslit tuto křivku v souladu s jeho „definicí“ křivek, které bude akceptovat v geometrii (viz str. 113), tj. *pohybem nebo několika takovými pohyby, z nichž následující jsou plně určeny předcházejícími.* Jinými slovy tuto křivku nemá charakterizovánu jako dráhu průsečíku dvou pohybujících se přímek.[102]

Jelikož při odvozování rovnice (3.9) v podstatě popsal konstrukci bodu[103] této křivky (tj. rovnice zde implikuje nalezení množiny bodů křivky!), vedlo ho to k dalšímu zamyšlení nad vymezením křivek, které bude akceptovat v geometrii.

[101] Viz [Lor10, str. 51–25]. V klasifikaci křivek třetího stupně se jí věnuje Newton , viz str. 155.

[102] Z obrázků je zřejmé, že způsob, kterým tuto křivku opisuje jeho pravítkový nástroj (viz str. 114 a obr. 3.13) jeho „definici“ neodpovídá, neboť tato křivka je dráhou průsečíku přímky a paraboly. Obdobně je tomu u konchoidy, která je opisována průsečíkem pohybující se přímky a pohybující se kružnice – viz obr. 3.15.

[103] Konstrukcí bodu rozumí v podstatě konstrukci plynoucí z rovnice tak, že v rovnici pro neznámé x a y zvolí $y = m$, vyjádří rovnici o jedné neznámé x, kterou vyřeší geometricky, tj. zkonstruuje kořen n (popř. kořeny) a na závěr vynese požadovaný bod $[m, n]$. Tento proces opakuje pro libovolnou volbu m.

Není však žádný bod na křivkách, které slouží k předložené otázce, který by se nemohl nalézt mezi těmi, které se určují způsobem právě vysvětleným. A protože tento způsob nalezení křivky nalezením řady lhostejno kolika bodů se nevztahuje pouze na ty křivky, které mohou takto být popsány pravidelným a spojitým pohybem, nelze je zcela vyloučit z geometrie. [Des37, str. 340]

V rozporu s tím, že bodové konstrukce zavrhl jako nedostatečné (jak jsme ukázali na str. 115), se k nim znovu vrací. V odstavci nazvaném *Které z křivek opisovaných nacházením řady jejích bodů lze přijmout do geometrie* také upřesňuje, že

[. . .] *je velký rozdíl mezi tímto způsobem nacházení mnoha bodů pro nalezení křivky a způsobem, který se používá pro spirálu a křivky podobné.* [Des37, str. 340]

Rozdíl vysvětluje tím, že u spirály, konchoidy apod. lze sestrojit jím popsaným způsobem jen některé body, kdežto u křivek jím zahrnutých do geometrie může takto sestrojit libovolný bod. Tato Descartova úvaha ukazuje, že neznal způsob vykreslení křivky, která by měla rovnici (3.9), spojitým pohybem, proto považoval za nutné rozšířit specifikaci křivek, jež bude zahrnovat do geometrie. Z toho ovšem plyne, že ještě nepřišel ani na tvrzení obdobné tvrzení Kempeho (viz pozn. 95 str. 114).

V odstavci nazvaném *Které křivky opsané pomocí provázku lze přijmout do geometrie* dokonce přidává ještě další způsob vymezení geometrických křivek:

A nelze odmítnout ani ty způsoby, kde se používá niti nebo provázku ke stanovení rovnosti nebo rozdílnosti dvou nebo více úseček, které lze vést z každého bodu hledané křivky k jiným bodům, nebo na jiné přímky pod jinými úhly: tak jak jsme to dělali v Dioptrice pro vysvětlení elipsy a hyperboly. Nelze přijmout totiž žádné křivky, které se podobají provázkům, to jest křivky, které jsou tu přímé a tu křivé, neboť poměr, který je mezi přímými a křivými není znám, a myslím si, že ani lidmi poznán být nemůže, nebylo by možno vyvodit nic, co by bylo přesné a jisté; protože se však v těchto konstrukcích nepoužívá provázku jinak než pro určení úseček, jejichž délky známe dokonale, nemůže to vést k jejich vyloučení. [Des37, str. 340–341]

Křivka o rovnici (3.9) hraje důležitou roli ve třetí knize jeho *Geometrie*, kdy právě pomocí ní ukazuje, jak najít grafické řešení rovnic pátého a šestého stupně. Kniha třetí dává odpověď na otázku *Co vedlo Descarta*

k tomu, aby se zabýval křivkami?. Ačkoliv byl pravděpodobně počátečním impulzem Pappův problém, přesněji řečeno snaha najít jeho řešení, postupně byla Descartova motivace daleko vyšší. Na Pappově problému Descartes pouze demonstruje svoji metodu, ale v úvodu třetí knihy říká, že křivky jím zařazené mezi geometrické mohou sloužit k řešení řady problémů. Tím má na mysli problémy vyjádřené formou algebraických rovnic. Lze tedy říci, že na rozdíl od starověkých učenců, kteří popsali několik křivek ve spojení s řešením konkrétních úloh, Descartes nahlíží na křivky daleko obecněji, a sice jím vymezené geometrické křivky mohou sloužit k řešení obecné (abstraktní) skupiny problémů. Připomeňme, že uveřejnil *Geometrii* formou dodatku k filozofickému spisu jako *příklad obecné sjednocující metody* řešení problémů a že i na geometrii nahlížel jako na vědu o řešení problémů.

Značná část třetí knihy je věnována řešení algebraických rovnic. Vzhledem ke studovanému tématu se jí nebudeme podrobněji zabývat.

3.3.1. Přínos Descarta k teorii křivek

V předcházejících odstavcích jsme se zabývali těmi pasážemi Descartovy geometrie, které se týkají křivek (alespoň natolik podrobně, jak nám dovoluje rozsah tohoto příspěvku) a hledali jsme odpovědi na dílčí otázky vytyčené v úvodu. Nyní se pokusíme shrnout vše do úvahy nad tím *Co bylo pro Descarta obsahem pojmu křivka?* a zamyslet se nad významem Descartova odkazu pro další studium křivek.

Již bylo řečeno, že pro Descarta byla geometrie věda o řešení (a konstruování) problémů. K řešení těchto problémů mohou sloužit právě jím vymezené křivky, a to buď tak, že jsou samy řešením problému nebo jsou tyto křivky prostředkem k řešení problému – např. jím popsaná křivka o rovnici (3.9) je na jedné straně řešením jistého Pappova problému pro pět přímek, na druhé straně slouží také jako způsob nalezení kořenů rovnic patého a šestého stupně.

Tímto postojem ke křivkám se Descartes ocitl (mimo jiné) před otázkami, jak „definovat“ křivky, kterými se bude zabývat v geometrii a jakým způsobem specifikovat novou křivku (tj. kdy je možno novou křivku považovat za popsanou). V jeho době (a dokonce ještě dlouho po něm) neexistoval žádný obecný koncept, jak popsat novou křivku. Z Descartovy *Geometrie* je zřejmé, že křivku považoval za známou a akceptovatelnou v geometrii, jestliže byl znám uspokojivý způsob, jak tuto křivku vykreslit.[104] Z jeho spisů vyplývá, že za uspokojivou reprezentaci křivky považoval:

- specifikaci mechanického zařízení složeného z pohyblivých pravítek, které spojitým pohybem (nebo několika pohyby, z nichž každý následující závisí na předcházejícím) vykresluje křivku jako dráhu průsečíku dvou „přímek“;
- metodu konstrukce libovolných bodů křivky;
- specifikaci křivky kreslícím zařízením obsahujícím kromě pravítek (pevných a pohyblivých ramen) také „rovný“ provaz.

Přitom u všech tří způsobů Descartes upřesňuje, čím budou *geometrické* (algebraické v naší terminologii) křivky odděleny od *mechanických* (transcendentních). Toto oddělení je založeno na Descartově tvrzení, že vztah mezi délkou transcendentní křivky a úsečky nemůže být přesně vyjádřen.

[104] Descartes požadavek vykreslení spojuje se slovem *poznání* nebo *chápání*: Např. [Des37, str. 307]: *... žádá se též, aby se poznala a nakreslila křivka, na níž se všechny musí nacházet* nebo [Des37, str. 319]: *Mohl bych zde uvést i jiné způsoby pro kreslení a chápání křivek, ...*

[...] *poměr, který je mezi přímými a křivými, není znám, a myslím si, že ani lidmi poznán být nemůže,* [...] [Des37, str. 340–341]

Je známo, že toto tvrzení, které Descartes intuitivně správně (bez důkazu) předjímá, bylo dokázáno až v 19. století.[105] U bodových konstrukcí používá Descartes k vymezení *geometrických* křivek požadavek konstruovatelnosti libovolného bodu na křivce.[106]

Tato pasáž Descartovy *Geometrie* může navádět k doměnce, že viděl korespondenci

$\mathcal{P}$		$\mathcal{R}$
křivka je vykreslena spojitým pohybem (ve výše uvedeném smyslu)	$\longleftrightarrow$	libovolný bod křivky lze konstruovat z rovnice (ve výše uvedeném smyslu).

Uvedená korespondence by odpovídala Kempeho tvrzení (viz pozn. 95 na str. 114).[107] Na straně 121 jsme však ukázali, že Descartes tuto korespondenci naopak neviděl a považoval množiny $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$ za neekvivalentní. O tom svědčí i Descartovo tvrzení, že *způsob nalezení křivky nalezením řady lhostejno kolika bodů se nevztahuje pouze na ty křivky, které mohou takto být popsány pravidelným a spojitým pohybem.*[Des37, str. 340]

Navíc nikde v Descartově *Geometrii* není náznak toho, že by považoval algebraickou rovnici za uspokojivou reprezentaci křivky, tj. neuvažuje dnešní (nám zcela přirozenou) korespondenci

algebraická rovnice	$\longleftrightarrow$	*algebraická křivka.*

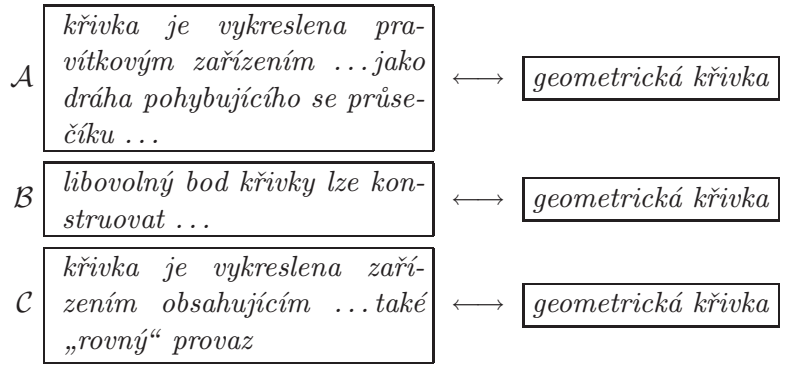
Analogicky k tomu bychom Descartem používané specifikace *geometric-*

[105] Viz např. [Fuc93, str. 90].

[106] Konstruovatelnost se rozumí ve smyslu pozn. 103.

[107] Např. Bos [Bos81, str. 318] se domnívá, že Descartes tuto korespondenci skutečně viděl.

kých (algebraických) křivek mohli znázornit následovně



Připomeňme, že Descartem vymezené *geometrické křivky* jsou právě *algebraické křivky* v dnešním smyslu. Nabízí se tedy otázka, zda se Descartes pokoušel najít ekvivalenci mezi množinami $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ a nahradit je množinou jednou. Můžeme konstatovat, že ano, ale ukazuje tyto ekvivalence jen na jednotlivých příkladech, přičemž u jiných se mu je patrně nedařilo najít.

Nezdá se však pravděpodobné, že by právě toto byla překážka, vždyť řadu tvrzení uvádí Descartes v *Geometrii* na základě několika příkladů (bez důkazu). Descartes konstatoval, že všechny křivky mají rovnici (viz str. 115), ale opačnou otázkou, zda také všechny algebraické rovnice popisují *geometrické* křivky (tj. zda pro každou rovnici existuje kreslicí nástroj ... atd.), se nezabývá. Konstatuje ovšem implikaci: algebraická rovnice $\Longrightarrow$ bodová konstrukce (viz str. 120). Nutno poznamenat, že jeho úvahy v tomto směru obsahují rozpory a jsou neúplné.

Základní otázkou ale zůstává, zda Descartes vůbec někdy uvažoval o reprezentaci *geometrické* křivky algebraickou rovnicí. Náš názor po prostudování jeho spisů je, že nikoliv. Celá koncepce jeho *Geometrie* je postavena na konstrukci řešení problémů pomocí průsečíků křivek. Pro Descarta byly evidentně tyto průsečíky nalezeny, pokud byly křivky zkonstruovány spojitým pohybem ve výše uvedeném smyslu (v tom případě bylo možno si je představit). Algebraické rovnice přitom používá jako nástroj, který dobře ovládá, ale je to jen nástroj a nikdy ne „definice“ křivky. Užitečnost tohoto nástroje je zdůrazněna při hledání normál ke křivkám, kde musela být rovnice křivky skutečně napsána. Užívá rovnice částečně také při klasifikaci křivek. Zavedení klasifikace křivek podle rodu (genre) a nikoliv podle stupně její rovnice nás však jen znovu upozorňuje na preferenci reprezentace křivky pomocí mechanického zařízení, neboť rod křivky právě charakterizuje toto zařízení (viz str. 115).

Dospěli jsme k závěru, že Descartes intuitivně vymezil do geometrie algebraické křivky. Přestože nepoužíval rovnice k „definici“ (specifikaci) nových křivek, velmi dobře ovládal metodu, jak tyto křivky algebraickými rovnicemi popsat a uměl také z těchto rovnic odvodit vlastnosti křivek. Jeho spisy pochopila teprve další generace. Během následujícího století (cca 1650–1750) se snad všichni matematikové zabývali vyšetřováním speciálních křivek, přičemž používali právě Descartovu metodu (B. Pascal, Ch. Huygens, I. Newton, G. W. Leibniz, Joh. Bernoulli, Jac. Bernoulli a další). Na jejich studiu se formovaly myšlenky vznikajícího infinitezimálního počtu, variačního počtu i počátky diferenciální geometrie. Teprve s těmito novými poznatky 18. století a s nově se formujícím pojmem *funkce* vzniká potřeba hledat exaktní definici křivky. Tím pouze naznačujeme, kterým směrem se budeme ubírat v dalších kapitolách.

Literatura

[Ada08] Adam–Tanery. *Oeuvres de Descartes*, svazek I–X. Léopold Cerf, Paris, 1897–1908.

[Apo90] Apollónius z Pergy. *Apollonius Conics Books V to VII (The Arabic Translation of the Lost Greek Original in the Version of the Banú Músa)*. Springer-Verlag, New York, 1990. (překlad do angličtiny a komentáře G. J. Toomer).

[Beč98] Bečvář, J. *René Descartes milovník rozumu*. Prometheus, Praha, 1998.

[Beč01] Bečvář, J. a kol. *Matematika ve středověké Evropě*, svazek 19 v *Dějiny matematiky*. Prometheus, Praha, 2001.

[Bos81] Bos, H. J. M. On the representation of curves in descartes g'eométrie. *Archive for History of Exact Science*, 24, 295–338, 1981.

[Coo40] Coolidge, J. L. *A History of Geometrical Methods*. Oxford, 1940.

[Des37] Descartes, R. *The geometry of Rene Descartes*. Leiden, 1637. (z francouzštiny a latiny přeložil do angličtiny David Eugene Smith a Marcia L. Latham, Chicago 1925; přetisk: Dover Publications, New York, 1954).

[Des53] Descartes, R. *Razsuždënije o metode s priloženijami dioptrika, meteory, geometrija*. Izd. Akademii nauk SSSR, Leningrad, 1953. (předklad a komentáře Juškevič A. P.).

[Fia98] Fiala, J. Descartesova geometrie: od geometrické algebry k algebraické geometrii. V *Filosofické dílo René Descartesa*. Filosofia – ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ, Praha, 1998. (Soubor úvah z mezinárodní konference k 400. výročí narození René Descartesa).

[Fol86] Folta, J. Od algebry a geometrie k analytické geometrii. V *Práce z dějin přírodních věd*, svazek 20. Praha, 1986. str. 85–95.

[Fuc93] Fuchs, E.–Bečvář, J., ed. *Historie matematiky I*, svazek 1 v *Dějiny matematiky*. JČMF, Praha, 1993.

[Fuc99] Fuchs, E.–Bečvář, J., ed. *Matematika v 16. a 17. století*, svazek 12 v *Dějiny matematiky*. Prometheus, Praha, 1999.

[Gra94] Grattan–Guinness, I., ed. *Companion Encyklopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. Routledge, London, 1994.

[Haw91] Hawking, S. W. *Stručná historie času*. Mladá fronta, Praha, 1991. (z angl. originálu A Brief History of Time, Bantam Books, New York, 1988, přeložil Karas, V.).

[Hei98] Heilbron, J. L. *Geometry Civilized*. Clarendon Press, Oxford, 1998.

[Isi00] Isidor ze Sevilly. *Etymologie I–III*, svazek III v *Knihovna středověké tradice*. OIKOYMENH, Praha, 2000. (překlad a poznámky Korte, D.).

[Juš70] Juškevič, A. P. *Istorija matëmatiki – matëmatika VII stoletija*, svazek II. Nauka SSSR, Moskva, 1970.

[Juš76a] Juškevič, A. P., ed. *Chrestomatija po istorii matëmatiki*. Prosvëščenie, Moskva, 1976.

[Juš77] Juškevič, A. P. *Dějiny matematiky ve středověku*, svazek I. Academia, Moskva, 1977.

[Kat98] Katz, V. J. *A history of mathematics: an introduction*. Addison-Wesley Educational Publishers, Inc., 2. vydání, 1998.

[Kem76] Kempe, A. B. On a general method of describing plane curves of the n^{th} degree by linkwork. *Proc. London Math. Soc.*, 7, 213–216, 1876.

[Lor10] Loria, G. *Spezielle algebraische and transzendente ebene Kurven*, svazek I. (Die algebraischen Kurven). Druck und Verlag von B. G. Teubner, 2. vydání, 1910.

[Pol03] Polanecká, J. *Geometrie české gotické architektury*. Diplomová práce PřF MU, Brno, 2003.

[Sch05] Schreiber, P. Some news on dürer's contributions to geometry. V *European Mathematics in the Last Centuries*, str. 141–148. Institute of Mathematics Wroclaw University, Wroclaw, 2005.

[Scr00] Scriba, C. J.–Schreiber, P. *5000 Jahre Geometrie: Geschichte Kulturen Menschen*. Springer, Berlin, 2000.

[Str63] Struik, D. J. *Dějiny matematiky*. Praha, 1963. (z angl. originálu A Concise History of Mathematics, G. Bell and Sons Ltd., London, 1956, přeložili Nový, L.-Folta, J.).

[Stu97] Studnička, J. O zásluhách descartesových v oboru věd exaktních. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, 26, 73–94, 1897.

[Ull87] Ullmann, E. *Svět gotické katedrály*. Praha, 1987.

Kapitola 4

1649–1748 – „století křivek“

Nejhlubší lidská touha po poznání je dostatečnou pobídkou k pokračujícímu hledání. A naším cílem není nic menšího než co možná nejúplnější pochopení světa, v němž žijeme.

S. W. Hawking [Haw91, str. 23]

Kapitolu 4 jsme časově vymezili prvním latinským překladem Descartovy *Geometrie* v roce 1649 a vydáním Eulerova spisu *Introductio in Analysin Infinitorum (Úvod do matematické analýzy nekonečně malých)* v roce 1748, který předznamenal období, kdy se pojem křivka vyvíjí v úzké spojitosti s pojmem funkce. Dílem Eulera se budeme zabývat proto až v kapitole 5.

V této kapitole nejprve v sekci 4.1 zmiňujeme komentované edice Descartovy *Geometrie* a další práce stěžejní pro studium křivek, které se v letech 1649–1748 rozvíjí téměř expanzivní rychlostí. V sekci 4.2 uvádíme, kromě obecnější charakteristiky studia křivek na přelomu 17. a 18. století, zajímavý příklad Cassiniho oválů. Historie objevu a zkoumání těchto křivek ilustruje charakteristické rysy té doby. V sekci 4.3 se věnujeme přínosu Newtona, přičemž podrobně rozebíráme jeho spis *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis (Výčet křivek třetího řádu)*, který byl pro teorii křivek v osmnáctém století naprosto stěžejní. V sekci 4.4 uvádíme významné práce, které na Newtonovy výsledky z teorie křivek navázaly, doplnily je nebo jimi byly inspirovány.

V sekci 4.5 rozebíráme některé skutečnosti z počátků diferenciálně geometrického studia křivek, které časově spadá také do vymezeného období. Zmiňuje nejstarší případ rektifikace algebraické křivky. V poslední

sekci shrnujeme odkaz tohoto „století křivek“ pro další vývoj.

4.1. Descartovi nástupci

4.1.1. Komentované edice Descartovy *La Géométrie*

První latinské vydání Descartových *Rozprav o metodě* z roku 1642 *Geometrii* vypouští. Latinský překlad *Geometrie* zhotovený pečlivě Francisem van Schootenem[1] vychází v roce 1649. Překlad byl stejně jako první původní francouzské vydání z roku 1637 vytištěn u Iana Maira v Leidenu a byl už doprovázen rozsáhlými vysvětlujícími výklady Florismonda de Beauna[2] a překladatele.[3]

Jedna z komentovaných edicí Descartovy *Geometrie* vydaná v letech 1659–61 byla opatřena dodatkem, který napsal Jan de Witt[4] v roce 1646, *Elementa curvarum linearum (Základy rovinných křivek)*. De Witt se díky Schootenovi seznámil s pracemi Descarta i Fermata a sepsal pojednání o kuželosečkách ze syntetického i analytického hlediska. První kniha je věnována vlastnostem kuželoseček s použitím tradičních metod syntetické geometrie, druhá kniha je v historii vůbec prvním systematickým pojednáním o kuželosečkách, které užitím nových ideí kompletně algebraicky vykládá kuželosečky. Ačkoliv myšlenky a metody jsou spíše podobné Fermatovi, značení de Witta je moderní jako u Descarta. Např. de Witt podobně jako Fermat ukazuje, že rovnice

$$y = \frac{bx}{a} \tag{4.1}$$

je rovnicí přímky, což u Descarta chybí. Nejdříve analogicky jako Fermat pojednává jen o kladných hodnotách obou konstant v rovnici (4.1), ale jde dál a ukazuje, že také několik dalších rovnic determinuje přímku:

$$y = \frac{bx}{a} + c,\ y = \frac{bx}{a} - c,\ y = c - \frac{bx}{a},\ y = c,\ x = c,$$

přičemž je vždy pro všechny případy uvažována jen ta část přímky, která leží v prvním kvadrantu.[5]

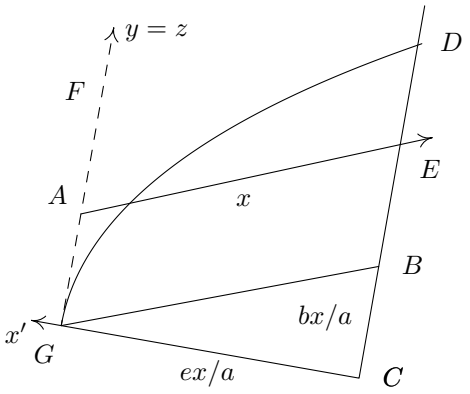
[1] Francis van Schooten (1615–1660).

[2] Florismond de Beaune [Debeaune] (1601–1652).

[3] Český překlad Descartovy *Geometrie* dosud nevyšel. Byl připraven v roce 1996 docentem RNDr. Jiřím Fialou, CSc. z Prahy (viz také [Fia98]) a věříme, že se brzy objeví na našem knižním trhu.

[4] Jan de Witt (1623–1672).

[5] Viz [Kat98, str. 443].



Obrázek 4.1: Konstrukce de Witta k rovnici (4.5)

Dále podobně jako Fermat ukazuje, že rovnice

$$y^2 = ax$$

reprezentuje parabolu. Přidává grafy parabol o rovnicích

$$y^2 = ax + b^2 \tag{4.2}$$
$$y^2 = ax - b^2 \tag{4.3}$$
$$y^2 = b^2 - ax \tag{4.4}$$

a o rovnicích, které obdrží z (4.2)–(4.4) záměnou x a y. Podobně jako u přímky jsou ukázány jen ty části grafů, kde x a y jsou kladné hodnoty. De Witt rozebírá detailně ale i složitější rovnici

$$y^2 + \frac{2bxy}{a} + 2cy = bx - \frac{b^2x^2}{a^2} - c^2. \tag{4.5}$$

Dosazením $z = y + \frac{bx}{a} + c$ do (4.5) dostaneme

$$z^2 = \frac{2bc}{a}x + bx \tag{4.6}$$

a dalším zjednodušením $d = \frac{2bc}{a} + b$ obdržíme

$$z^2 = dx \tag{4.7}$$

tedy parabolu.

De Witt dále ukazuje, jak použít tyto transformace k vykreslení množiny bodů (viz obr. 4.1): Uvažujme souřadnice libovolného bodu $D =$

$[x, y]$, úsečku AE jako osu x a úsečku AF jako osu y, $|BE| = |AG| = c$. Prodloužíme DB do C tak, že

$$\frac{|GB|}{|BC|} = \frac{a}{b},$$

nebo-li

$$|BC| = \frac{bx}{a}$$

a odtud

$$|DC| = y + \frac{bx}{a} + c = z. \tag{4.8}$$

Také

$$\frac{|GB|}{|GC|} = \frac{a}{e}, \text{ tj. } |GC| = \frac{ex}{a}.$$

Moderním jazykem bychom řekli, že de Witt použil transformaci souřadnic

$$x = \frac{a}{e}x' \tag{4.9}$$

$$y = z - \frac{b}{e}x' - c, \tag{4.10}$$

aby přešel od kosoúhlého souřadného systému $x = AE$, $y = AF$ k pravoúhlému souřadnému systému $x' = GC$, $z = GF$, tedy bod $D = [x, y]$ má nové souřadnice $[x', z]$. V nových souřadnicích má křivka rovnici

$$z^2 = \frac{da}{e}x', \tag{4.11}$$

tedy jedná se o parabolu s vrcholem v bodě G a osou GC.

Witt kreslí tuto parabolu, přesněji její část, nad původní osou AE. Důkaz končí poznámkou, že libovolný daný bod D této množiny splňuje základní vlastnost paraboly

$$|DC|^2 = |GC| \cdot \frac{da}{e},$$

tedy

$$z^2 = \frac{ex}{a} \cdot \frac{da}{e}$$

a odtud

$$z^2 = dx.$$

Substitucí $z = y + c + \frac{bx}{a}$ dostaneme původní rovnici.

Podobným způsobem detailně rozebírá elipsu a hyperbolu, přičemž vždy nejdříve ukazuje, jak jejich rovnici redukovat.

Ačkoliv de Witt neudává pro původní rovnice podmínky, podle kterých by bylo možno stanovit, zda se jedná o parabolu, elipsu nebo hyperbolu, není těžké to udělat analyzováním jeho příkladů. Witt uzavírá svou práci poznámkou, že libovolná kvadratická rovnice dvou proměnných může být transformována do standardní formy rovnice, která reprezentuje přímku, kružnici nebo kuželosečku. Ačkoliv Fermat i Descartes nastínili stejný výsledek, de Witt byl první, kdo studoval všechny detaily množiny bodů zadané kvadratickou rovnicí.

4.1.2. Další spisy inspirované Descartovou *La Géométrie*

Zvláštní místo zaujímá kniha l'Hospitala[6] z roku 1696 *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes (Analýza nekonečně malých [veličin] pro vyšetřování křivých čar)*, která byla vydána na základě přednášek Johanna Bernoulliho v letech 1691–92 a která

> *byla první – a na dlouho jedinou – začátečníkům přístupnou učebnicí diferenciálního počtu a která se velmi věnovala rovinným křivkám. Tak třeba se v ní objevuje „point de rebroussement de la seconde sorte", bod vratu druhého druhu* [...]. *Je však třeba říci, že za vědeckým obsahem knihy stál Johann Bernoulli, za metodickým zpracováním l'Hospital sám.* [...] *i objev bodu vratu druhého druhu je třeba přičíst Bernoulliovi.* [Fuc99, str. 153]

Knihu lze navíc považovat za vůbec první spis diferenciální geometrie (viz odstavec 4.5).

V roce 1707 vydává l'Hospital v Paříži první systematický výklad analytické geometrie *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour le résolution des équations dans les problèmes tant déterminez qu'indéterminez (Analytický traktát o kuželosečkách a o jejich použití k řešení determinovaných i nedeterminovaných úloh)*. Odvodil zde vlastnosti kuželoseček částečně pomocí jejich rovnic a algebry, částečně metodami elementární geometrie. V principu správně chápal otázku kladných a záporných souřadnic x a y. Podrobně jsou rozebrány všechny případy na příkladu přímky

$$y = \frac{b}{a}x$$

a kružnice

$$y^2 = a^2 - x^2,$$

[6] Guillaume François Antoine Marquis de l'Hospital (1661–1704).

ale dále se podobně jako jeho předchůdci omezuje jen na kladné hodnoty x a y. Proto i v jeho spise chybí rovnice přímky

$$y = -\frac{bx}{a} - c.$$

L'Hospital uvažoval řadu zajímavých úloh, např. ukázal, že geometrické místo bodů, pro něž podíl vzdáleností od dvou pevně daných bodů je konstantní, je Apollóniova kružnice.

Dalším přínosem k analytické geometrii byl spis Hermanna[7] *Phoronomia seu de Viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum (O silách a pohybech pevných těles a kapalin)* z roku 1716 a v tom stejném roce Hermann vyslovil tvrzení:

Tvrzení. Rovnice křivky n-tého stupně s koeficientem 1 u y^n má $\frac{n(n+3)}{2}$ koeficientů.

Mimo jiné řešil také Keplerovu úlohu rozdělit půlkružnici v daném poměru a zabýval se sférickou epicykloidou, pro niž našel vyjádření

$$l = \frac{4b}{a}\sqrt{a^2 - 2ab\cos\phi + b^2},$$

kde $a,\ b$ jsou poloměry kružnic a ϕ je úhel, který svírají roviny, v nichž kružnice leží. Ve srovnání se svými předchůdci provedl Hermann úplnější analytické vyšetřování křivek druhého stupně. Také rozšířil metodu polárních souřadnic, poprvé užitou Jacobem Bernoullim v roce 1691 pro spirály, na libovolné rovinné křivky a zdůraznil, že s jejich pomocí lze vlastnosti křivek vyšetřovat podobně jako pomocí souřadnic Descartových. Rovnice přechodu od polárních souřadnic k souřadnicím kartézským (Descartovým) zapsal ve tvaru

$$x = nz,\ y = mz,$$

kde z je „poloměr projekce“, m a n je kosinus a sinus „úhlu projekce“, což je v podstatě dnešní vyjádření. Mezi křivkami, jejichž rovnice Hermann uvádí v polárních souřadnicích byla i parabola. Jde o vůbec první použití polárních souřadnic pro kuželosečky v historii. Hermann také jako první přistoupil k systematické práci v analytické geometrii v prostoru.[8]

[7] Jacob Hermann (1678–1733), žák Jacoba Bernoulliho.

[8] V prvních šesti dílech *Zápisů* Petrohradské akademie najdeme 12 matematických prací Hermanna. Viz [Juš72, str. 154].

4.2. Studium křivek na přelomu 17. a 18. století

Metody analytické geometrie (a postupně také metody vznikajícího infinitezimálního počtu) bylo možné ověřovat na rovinných křivkách. Díky tomu se studium rovinných křivek na konci 17. a zejména v první polovině 18. století neobyčejně rozvíjí. Pozornost na sebe přitáhly křivky popsané ve starověku. Např. Dioklova kisoida (viz str. 52) byla objektem, na němž mnoho matematiků zkoušelo konstrukci tečny a další úlohy, z nichž vznikal infinitezimální počet. R. Sluze[9] jako první v dopise Huygensovi z roku 1658 opouští představy starověkých učenců o kisoidě a uvažuje tuto křivku i mimo oblast ohraničenou kružnicí. Podobně jako Dioklova kisoida dočkala se v 17. století oživení i Nikomédova konchoida (viz str. 53). Konstrukcí její tečny se zabývali už v letech 1636–37 Descartes, Fermat a Roberval. Roberval však považoval větve konchoidy za dvě různé křivky. Inflexní body konchoidy vyšetřoval v letech 1653–54 Huygens, jehož postup našel v 19. století ohlas v algebraické geometrii.[10] Jejím využitím se zabýval i Newton.

Kromě intenzivního studia (a v mnohém znovuobjevování) křivek starověké geometrie spadá do tohoto období i objevení některých křivek nových. Podněty k popisu nových křivek přicházely z praxe nebo je skýtala sama geometrie. Descartův list (viz obr. 4.2(b)) je algebraická křivka vyjádřená v dnešní symbolice rovnicí

$$x^3 + y^3 = 3axy, \ a > 0. \tag{4.12}$$

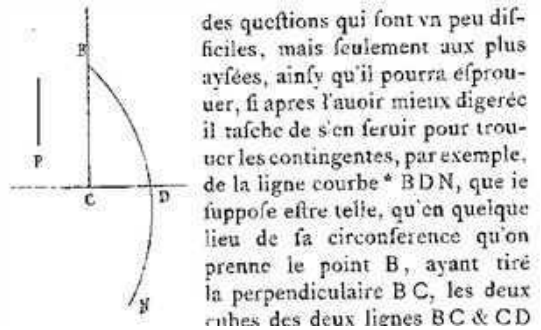
Ačkoliv první zmínka o této křivce se objevuje v Descartových dopisech Mersennovi v roce 1638 (viz obr. 4.2(a)), kde Descartovi sloužila při konstrukci tečny,[11] její celkový průběh vyšetřil teprve Huygens roku 1692.

Do vymezeného období spadá i proslavená úloha o brachistochroně zformulovaná Johannem Bernoullim v roce 1696:

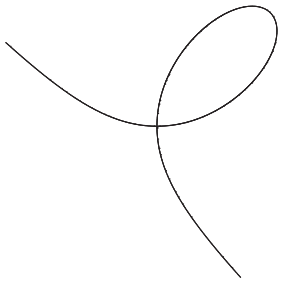
Ve vertikální rovině s pravoúhlou soustavou souřadnic (osa x je horizontální) zvolme body $A = [x_a, y_a]$, $B = [x_b, y_b]$, *kde* $x_a \neq x_b$ *a* $y_a > y_b$. *Po jaké křivce se musí pohybovat hmotný bod, aby z polohy A dospěl do polohy B v nejkratším čase?*

Johann Bernoulli vzápětí úlohu vyřešil, odpovídající křivkou je ***cyk-***

[9] René François Walter de Sluze (1622–1685).
[10] Podrobněji [Fuc99, str. 141].
[11] Viz Descartův dopis Mersennovi z ledna 1638 v [Ada08, svazek I, str. 490].


des queſtions qui ſont vn peu difficiles, mais ſeulement aux plus auſées, ainſy qu'il pourra éſprouuer, ſi apres l'auoir mieux digerée il taſche de s'en ſeruir pour trouuer les contingentes, par exemple, de la ligne courbe * B D N, que ie ſuppoſe eſtre telle, qu'en quelque lieu de ſa circonference qu'on prenne le point B, ayant tiré la perpendiculaire B C, les deux cubes des deux lignes B C & C D

(a) zmínka Descarta o křivce (viz BDN) z roku 1638



(b) průběh křivky

Obrázek 4.2: Descartův list

loida.[12] Řešení podal i jeho bratr Jacob, Newton, Leibniz a l'Hospital.[13] Historie této křivky je popsána v dostupné literatuře,[14] proto se jí zde nebudeme zabývat.

Způsob, jakým se v té době nové křivky často dostávaly do povědomí, ilustrujeme na méně známé historii tzv. ***Cassiniho oválů*** v odstavci 4.2.1.

Období 1649–1748 je specifické vyšetřováním mnoha speciálních případů, ale chybí snaha o zobecňování. Jedinou výjimku v tomto směru tvoří teorie kubických křivek vytvořená Newtonem (viz sekce 4.3). Přestože např. rovnice paraboly přímo nabízí zobecnění

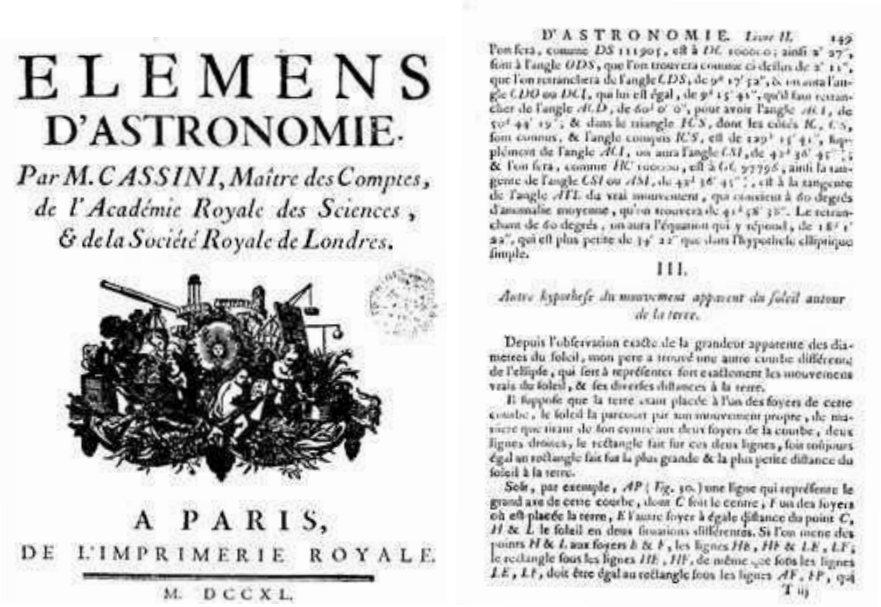
$$y^k = px,\ k \in \mathbb{Q}^+, \tag{4.13}$$

k rozsáhlejšímu studiu těchto tzv. obecných parabol dochází až v první polovině 19. století. Speciální případy ovšem spadají do období, kterým se zde zabýváme. Vlastnosti ***kubické paraboly***, tj. křivky (4.13) pro $k = 3$, studoval především Joh. Bernoulli v roce 1698. Případ $k = \frac{2}{3}$, tj.

[12] Ačkoliv se zdá velmi pravděpodobné, že už starověcí učenci uvažovali křivku tohoto typu, důkaz o tom nemáme. Podle [Lor11, str. 74] je první zmínka o cykloidě v knize Charlese de Bouvellese (1471–1553) vydané v Paříži roku 1501. V novověku studoval cykloidu Mikoláš Kusánský [Nicholas Cusa] (1401–1464), když se pokoušel vypočítat obsah kruhu. Pravděpodobně křivku pojmenoval Galileo v roce 1599. Roku 1639 psal E. Torricellimu (1608–1647), že studuje vlastnost této křivky 40 let.

[13] *Řešení obou bratrů byla názorným dokladem rozdílnosti jejich přístupů k matematickým problémům. Johann obdržel výslednou rovnici cykloidy geniální intuicí a využitím analogie s Fermatovým principem o šíření světla. Jacobův systematický postup vedl k objevu variačního počtu, k němuž dal takto vlastně Johann podnět.* Viz [Fuc99, str. 88].

[14] Viz např. [Fuc99].



ELEMENS
D'ASTRONOMIE.
Par M. CASSINI, Maître des Comptes, de l'Académie Royale des Sciences, & de la Société Royale de Londres.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DCCXL.

D'ASTRONOMIE. *Livre II.* 149

l'on fera, comme *DS* 111305, est à *DC* 100000 ; ainsi 3° 27′, sont à l'angle *ODS*, que l'on trouvera comme ci-dessus de 3° 11″, que l'on retranchera de l'angle *CDS*, de 9° 17′ 52″, & on aura l'angle *CDO* ou *DCI*, qui lui est égal, de 9° 14′ 41″, qu'il faut retrancher de l'angle *ACD*, de 60° 0′ 0″, pour avoir l'angle *ACI*, de 50° 44′ 19″ ; & dans le triangle *ICS*, dont les côtés *IC*, *CS*, sont connus, & l'angle compris *ICS*, est de 129° 15′ 41″, supplément de l'angle *ACI*, on aura l'angle *CSI*, de 42° 36′ 45″ ; & l'on fera, comme *IC* 100000, est à *CS* 73798, ainsi la tangente de l'angle *CSI* ou *ASM*, de 42° 36′ 45″, est à la tangente de l'angle *AFL* du vrai mouvement, qui contient 60 degrés d'anomalie moyenne, qu'on trouvera de 41° 58′ 38″. Le retranchant de 60 degrés, on aura l'équation qui y répond, de 18° 1′ 22″, qui est plus petite de 34′ 22″ que dans l'hypothèse elliptique simple.

III.

Autre hypothèse du mouvement apparent du soleil autour de la terre.

Depuis l'observation exacte de la grandeur apparente des diametres du soleil, mon pere a trouvé une autre courbe différente de l'ellipse, qui sert à représenter fort exactement les mouvemens vrais du soleil, & ses diverses distances à la terre.

Il suppose que la terre étant placée à l'un des foyers de cette courbe, le soleil la parcourt par son mouvement propre, de maniere que tirant de son centre aux deux foyers de la courbe, deux lignes droites, le rectangle fait sur ces deux lignes, soit toujours égal au rectangle fait sur la plus grande & la plus petite distance du soleil à la terre.

Soit, par exemple, *AP* (*Fig.* 30.) une ligne qui représente le grand axe de cette courbe, dont *C* soit le centre, *F* un des foyers où est placée la terre, *E* l'autre foyer à égale distance du point *C*, *H* & *L* le soleil en deux situations différentes. Si l'on mene des points *H* & *L* aux foyers *E* & *F*, les lignes *HE*, *HF* & *LE*, *LF*, le rectangle sous les lignes *HE*, *HF*, de même que sous les lignes *LE*, *LF*, doit être égal au rectangle sous les lignes *AF*, *FP*, qui

T iij

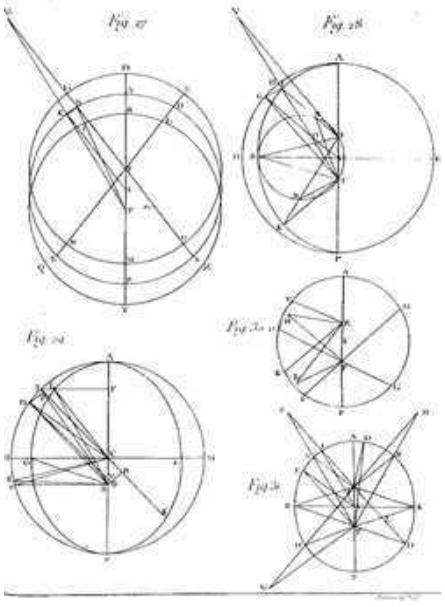
150 ELEMENS

mesurent la plus grande & la plus petite distance du soleil à la terre.

Pour déterminer les points *H* & *L*, qui répondent aux distances données du soleil à la terre, on décrira du point *C*, comme centre, & de l'intervalle *CA* ou *CP*, le cercle *ADPG*, & ayant pris *FD* à discrétion d'une quantité qui soit plus grande que *FP*, & plus petite que *AF*, on décrira du foyer *F*, comme centre à l'intervalle *FD*, l'arc de cercle *DH*, qui coupera le cercle *ADPG* en *D*. On prolongera *DF* en *G*, & du point *E*, comme centre à l'intervalle *ET*, égal à *FG*, on décrira un arc de cercle *TH*, qui coupera le précédent *DH* au point *H*. Je dis que le point *H* représentera un des points de la courbe cherchée où le rencontre le soleil lorsque sa distance à la terre est mesurée par *FD*, car le rectangle fait sous les lignes *FH*, *HE*, est égal au rectangle fait sous les lignes *FD*, *FG*, qui par la construction, leur sont égales. Mais le rectangle fait sous les lignes *FD*, *FG*, est par la propriété du cercle, égal au rectangle sous les lignes *AF*, *FP*, qui mesurent la plus grande & la plus petite distance du soleil à la terre : donc le rectangle sous les lignes *FH*, *HE*, est égal au rectangle fait sous la plus grande & la plus petite distance à la terre, & par conséquent le soleil est au point *H*.

On déterminera de la même maniere le point *L* où se trouve le soleil sur la courbe cherchée, lorsque sa distance à la terre est mesurée par *FI*, qui est plus petite que sa moyenne distance *PC*, en menant du point *F* à l'intervalle *FI*, l'arc de cercle *IL*, & du point *E* à l'intervalle *EK*, égal à *FM*, l'arc *KL*, qui coupera le précédent au point *L* cherché.

Pour déterminer préfentement l'équation du soleil, ou la différence entre son anomalie moyenne & son anomalie vraie, qui répond aux différens points de son orbe, comme, par exemple, lorsqu'il est en *H*, on fera, comme *FD* en *FH*, distance donnée du soleil à la terre, est à sa plus grande distance *AF* ; ainsi sa plus petite distance *FP*, est à la grandeur de *FG* ou *HE*, & dans le triangle *EHF*, dont les côtés *FH*, *HE*, sont connus, de même que *FE*, qui mesure le double de l'excentricité de l'orbe du soleil, on trouvera l'angle *EFH* de son anomalie vraie, & l'angle *HEH* ou *AEH* de son anomalie moyenne. La différence *EHF*, mesure



Obrázek 4.3: Ukázka z *Eléments d´astronomie* z roku 1740 (titulní strana, strany 149–150, kde popisuje J. Cassini ovál, a příslušný obrázek)

křivku typu

$$y^{\frac{2}{3}} = px,$$

pojmenoval J. Wallis[15] ***semikubickou parabolou***. Z Wallisova podnětu se jí zabýval W. Neil[16] roku 1657 a zjistil, že semikubická parabola je algebraicky rektifikovatelná křivka.[17] Jeho výsledky uveřejnil v roce 1659 opět Wallis (viz str. 164).

4.2.1. Cassiniho ovály

Cassiniho ovál je křivka, která byla nazvána po francouzském astronomovi Giovannim Domenicu Cassinim.[18] G. Cassini proslul mnohými výsledky v astronomii (např. objevil čtyři Saturnovy měsíce). Roku 1669 byl jmenován členem akademie věd v Paříži a ředitelem nové hvězdárny. Jeho syn, vnuk i pravnuk ho v ředitelství následovali. G. Cassini popsal ovál roku 1680 jako domělou dráhu pohybu Země kolem Slunce, přičemž Slunce se nachází v jednom ohnisku. Jeho výsledek uveřejnil jeho syn Jacob Cassini[19] v *Eléments d'astronomie (Základy astronomie)* teprve roku 1740 (viz ukázka na obr. 4.3).

Z dnešního pohledu lze říci, že Cassiniho ovál je jistou analogií elipsy a v moderní symbolice bychom ho popsali následovně:

Definice. Nechť F a G jsou dva pevně dané body v rovině, $F \neq G$. Množina bodů X v rovině takových, že součin vzdáleností $|FX|$ a $|GX|$ je konstantní a roven k^2, se nazývá ***Cassiniho ovál***.

Tedy Cassiniho ovál lze popsat rovnicí

$$|FX| \cdot |GX| = k^2. \tag{4.14}$$

Označíme–li vzdálenost mezi body F a G (ohnisky) $2c$, tj. $|FS| = c = |GS|$, pak v pravoúhlé souřadné soustavě $S[0,0]$, $x = |SG|$ je $F = [-c, 0]$, $G = [c, 0]$ a rovnice (4.14) může být vyjádřena jako

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= k^2, \\ ((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2) &= k^4. \end{aligned} \tag{4.15}$$

[15] John Wallis (1616–1703).
[16] William Neil (1637–1670).
[17] Viz [Fuc99, str. 139].
[18] Giovanni Domenico Cassini (1625–1712).
[19] Jacob Cassini (1677–1756).

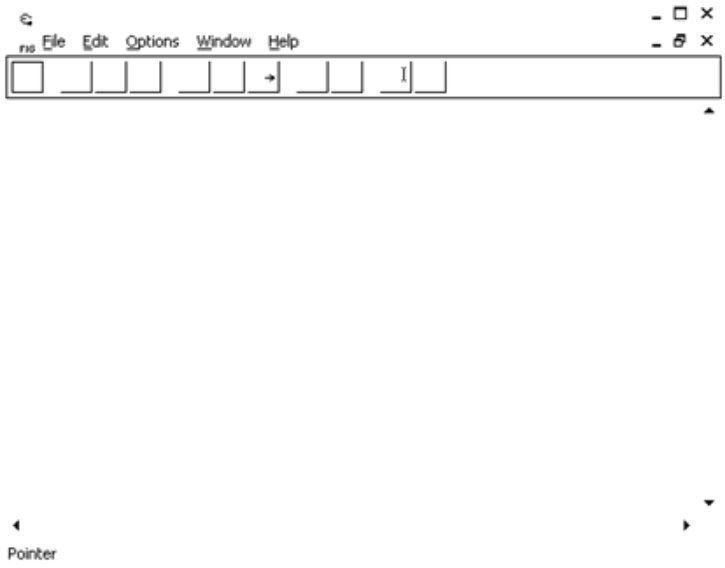
Jednoduchými úpravami obdržíme z (4.15) známější vyjádření:[20]

$$(x^2+y^2)^2+2c^2(y^2-x^2)+c^4-k^4=0. \tag{4.16}$$

Cassiniho ovál je křivka čtvrtého stupně, tj. s přímkou musí mít včetně násobnosti čtyři průsečíky. Vypočítáme průsečíky s osami x, y

$$[\pm\sqrt{c^2\pm k^2},0],\ [0,\pm\sqrt{-c^2\pm k^2}].$$

Vidíme, že některé průsečíky mohou být imaginární. Počet reálných průsečíků závisí na hodnotě parametrů c a k. Provedeme diskusi geometrických vlastností křivky vzhledem k těmto parametrům, pro $c>0$, neboť c značí vzdálenost ohnisek, a bez újmy na obecnosti lze předpokládat také $k>0$.



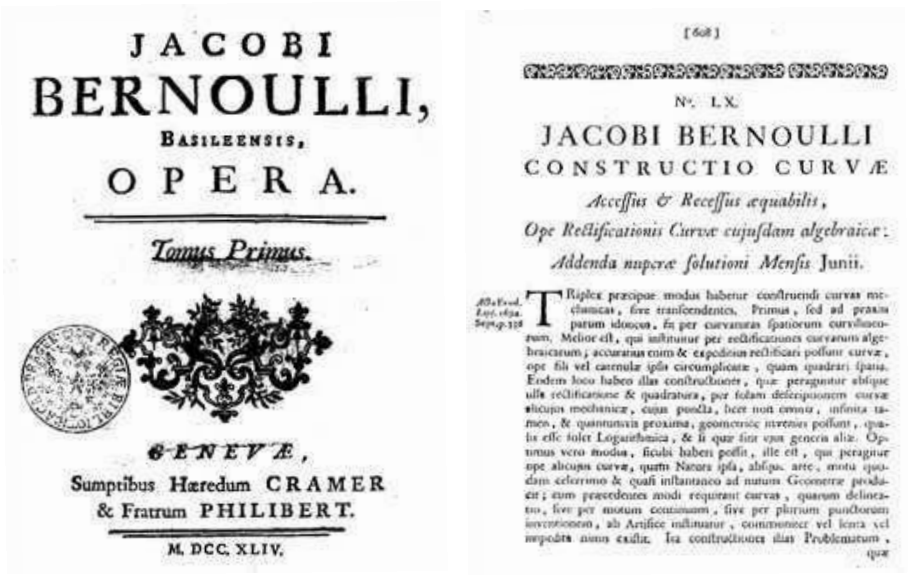
Obrázek 4.4: Cassiniho ovály sestrojené v Cabri Geometrii

Není těžké ukázat, že pro $c<k$ je Cassiniho ovál souvislá křivka a pro $c>k$ sestává ze dvou disjunktních větví (viz obr. 4.4). Pro $c=k$ prochází počátkem souřadného systému a protíná v tomto bodě sebe sama, neboť jestliže $c=k$, pak z rovnice (4.16) obdržíme

$$(x^2+y^2)^2+2c^2(y^2-x^2)=0. \tag{4.17}$$

[20] Viz např. [Lor10, str. 209].

Takovou diskusi však Cassini neprovedl, s největší pravděpodobností proto, že ho jako astronoma zajímala tato křivka pouze jako domělá dráha oběhu Země kolem Slunce.


JACOBI
BERNOULLI,
BASILEENSIS,
OPERA.
Tomus Primus.
GENEVÆ,
Sumptibus Hæredum CRAMER
& Fratrum PHILIBERT.
M. DCC. XLIV.

[668]

Nº. LX.

JACOBI BERNOULLI
CONSTRUCTIO CURVÆ
Accessus & Recessus æquabilis,
Ope Rectificationis Curvæ cujusdam algebraicæ:
Addenda nuperæ solutioni Mensis Junii.

Obrázek 4.5: *Acta Eruditorum* z roku 1694 s příspěvkem Jacoba Bernoulliho o lemniskatě

Roku 1694 Jacob Bernoulli[21] poprvé popsal nezávisle na Cassinim ten případ, kdy je konstanta rovna polovině vzdálenosti ohnisek – viz rovnice (4.17). Bernoulli uvedl polární rovnice této křivky a pojmenoval ji *lemniscus* z řeckého slova $\lambda\iota\mu\nu\iota\sigma\kappa o\varsigma$ – stuha, mašle. Svůj objev uveřejnil v *Acta Eruditorum* v září 1694 (viz ukázka na obr. 4.5). Netušil tehdy, že před čtrnácti lety Cassini popsal obecnější případ takové křivky, což není překvapivé, uvědomíme-li si, že o Cassiniho oválu píše až jeho syn roku 1740. Zajímavé ale je, že o souvislosti Cassiniho oválu a Bernoulliho lemniskaty nevěděli matematikové ještě několik desetiletí, ačkoliv se zejména lemniskatou řada z nich zabývala. Lemniskatě vyjádřené implicitní rovnicí (4.17) odpovídá křivka procházející počátkem na obr. 4.4. Vlastnosti lemniskaty studoval zejména Fagnano kolem roku 1750.[22] Zdá se však, že geometři Fagnanovy epochy studovali lemnis-

[21] Jacob (Jacques) Bernoulli (1654–1705), bratr neméně proslulého matematika Johanna Bernoulliho.

[22] Giovanni Francesco Fagnano (1715–1797). Později se lemniskatou zabývali také Euler a Gauss. Jejich práce vedly k zavedení eliptických funkcí a k teorii eliptických integrálů v 19. století.

katu více z analytického hlediska, než aby odkrývali její geometrické vlastnosti. G. Loria uvádí rok 1782 jako rok, kdy P. Ferroni[23] ukázal že speciálním případem Cassiniho oválů je Bernoulliova lemniskata.[24] Ale ještě v roce 1785 píše d'Alembert v *Encyklopedie méthodique* pod heslem LEMNISCATE:

Je možno najít další křivky ve tvaru číslice osm. Viz např. elipsa Cassiniho, ale ta, o které jsme se právě zmiňovali, je jednodušší.[25]

Z toho vyplývá, že lemniskatu a Cassiniho ovály považoval za dvě různé křivky. A tak se skutečnost, že lemniskata je jen speciální případ Cassiniho oválů, dostává do povědomí matematiků až po roce 1806, kdy byla totožnost obou křivek dokázána G. Saladinim.[26]

4.3. Isaac Newton a teorie křivek

V předchozích odstavcích jsme mohli sledovat, že nových výsledků obdržených v geometrii pomocí nové metody představené Descartem nebylo na přelomu 17. a 18. století mnoho a hlavně měly spíš nesouvislý charakter.[27] Teprve Newton přidal k analytické geometrii kuželoseček novou širokou oblast – teorii kubických křivek, jejichž jednotlivé případy byly známy již dříve.

Není naším cílem věnovat se zde osobnosti Newtona, ani jeho rozsáhlému přínosu pro přírodní vědy. Klademe si za úkol jen poukázat na to, co přinesly jeho práce k teorii křivek. Přestože Newtonovy myšlenky zásadně ovlivnily celou tehdy známou matematiku a fyziku, šířily se většinou jen díky korespondenci, přednáškám a rukopisům kolujícím mezi jeho přáteli. Publikoval je často až na naléhání druhých a mnohé bylo publikováno několik let po rukopise nebo až po Newtonově smrti.

Je známo, že se během svých studií na univerzitě v Cambridge seznámil s pracemi Eukleida, Apollónia, Vièty, Fermata, Keplera, Descarta i Wallise. Po té, co prostudoval druhé latinské vydání Descartovy *Geometrie* vydané v letech 1659–61 a spisy Wallise a Schootena, Newton

[23] Pietro Ferroni (1744–1825).

[24] Loria se v [Lor10, str. 216] odkazuje na článek *Prodromo d'osservazioni sopra il trattato di calcolo integrale pubblicato in Parigi dal sig. Marchese de Condarcet*, Mem. Societa ital. delle Scienze V, 1790.

[25] *Il peut y avoir plusieurs autres courbes en 8 de chiffre. Voyez, par example, Ellipse de Cassini: mais celle dont nous venons de parler est la plus simple.* Viz *Encyklopedie méthodique*, Paris, 1785, tome second, str. 266-7.

[26] Girolamo Saladini (1731–1813); viz [Lor10, str. 216].

[27] *Větší roli než v samotné geometrii sehrála metoda souřadnic a rovnice s proměnnými veličinami v rozvíjející se analýze.* Viz [Juš70, str. 114].

plně ovládl analyticko–geometrické metody, naučil se pracovat s kosoúhlými souřadnicemi a rozšířil všechny poznatky o kuželosečkách na křivky třetího stupně; doplnil nové myšlenky a vytvořil odpovídající terminologii. Část výsledků obdržel už v roce 1664, hlavní výsledky pak vyložil v rukopisech v letech 1667–1668. Provedl detailní klasifikaci kubik, přičemž podrobně charakterizoval vlastnosti každého z 58 jím tehdy stanovených typů, opatřil je pečlivým nákresem a názvem. V následujících letech Newton klasifikaci několikrát upřesnil, přidal dalších 14 typů kubik, které dříve ušly jeho pozornosti, a změnil původní terminologii. Značná část všech výsledků později vyšla v *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis (Výčet křivek třetího řádu)* (1704), několik tvrzení týkajících se křivek je obsaženo v jeho životním díle *Philosophiae naturalis principia mathematica (Matematické principy přírodních věd)* (1687) a v práci *Aritmetica Universalis (Obecná aritmetika)* (1707). Jednu z nejvýznamnějších vět o algebraických křivkách zformulovanou v rukopise z roku 1667 Newton nikde nepublikoval, poprvé byla publikovaná Maclaurinem v roce 1720 – viz. strana 160.

Práci *Aritmetica Universalis* publikovanou roku 1707 v souvislosti s křivkami zmíníme jen krátce.[28] Moderní symboliku použitou v knize převzal Newton od Descarta, ale opustil Descartovo úzké sepětí algebry a geometrie, jeho algebra je postavena na aritmetickém základu. Jako první bez rozpaků užívá záporná čísla a záporné souřadnice.[29] V prvním dílu jeho knihy se geometrie objevuje v 61 geometrických úlohách,[30] které se týkají zejména výpočtů některých prvků v trojúhelníku a analytické geometrie. Zahrnuje i variaci Pappovy úlohy (úloha 23.), kuželosečky určené několika body a tečnami, nalezení geometrických míst, rovnici kisoidy apod. Druhý díl *Aritmetica Universalis* je věnován obecné teorii algebraických rovnic. Geometrickým problémům Newton přiřazuje algebraické rovnice[31] a v závěrečné části *Aequationum*

[28] Newton v letech 1673–83 přednášel v Cambridge kurs algebry a podle nařízení univerzity měl tyto přednášky sepsat pro knihovnu. Tak byl roku 1674 rukopis *Aritmetica universalis; sive de compositione et resolutione aritmetica* skutečně v knihovně uložen, ale Newton se o jeho publikování nezajímal, a tak vyšel až roku 1707 zásluhou Newtonova nástupce W. Winstona. Viz [Fuc99, str. 225].

[29] *He is the first writer to take advantage of the great simplification that comes from allowing coordinates take negative values.* Viz [Coo40, str. 128].

[30] První díl sestává ze čtyř sekcí. Sekce první obsahuje obecné úvahy o vztahu algebry a aritmetiky, o aritmetických operacích; druhá sekce je věnována algebraickým rovnicím; třetí a čtvrtá sekce prezentuje řešení 16 aritmetických a 61 geometrických úloh.

[31] *He first states his problems in a geometrical form, then introduces algebraic formulae and manipulations wherever they are helpful. A very noteworthy feature is the introduction of the method of undetermined coefficients, a metod of witch he was*

constructio linearis se zabývá hledáním kořenů rovnic pomocí geometrických konstrukcí. Na rozdíl od Descarta však nikoliv proto, aby dokázal existenci řešení úloh, nýbrž z praktického hlediska, neboť grafické řešení vede k rychlému přibližnému určení kořenů. Podobně jako Descartes používá ke konstrukci kořenů kubických rovnic kuželosečky, Nikomédovu konchoidu a Dioklovu kisoidu.

V roce 1686 předložil Newton Královské společnosti rukopis svého životního díla *Philosophiae naturalis principia mathematica*, o rok později práce vyšla tiskem.[32] Práce obsahuje zejména základy klasické mechaniky. Pojednává o centrálních silách, gravitačním zákonu apod. Jedním z Newtonových cílů bylo odvození základních poznatků o pohybu těles ve vesmíru (odvození Keplerových zákonů, objasnění přílivu a odlivu apod.) – viz ukázka na obr. 4.6. Vzhledem k našemu tématu je zajímavé, že v celé práci jsou používány geometrické důkazy. Newton následoval styl řecké geometrie – reprezentoval sílu, rychlost a další veličiny způsobem používaným v Eukleidových *Základech*, tj. pomocí úseček a nikoliv určitým počtem jednotek. Z jiných Newtonových prací je zřejmé, že nijak neupřednostňoval geometrii nad analýzou, ale důvodem pro přijetí geometrie jako nástroje pro důkazy jeho bádání byl patrně fakt, že rodící se analýza v té době nebyla jako nástroj rozpracována. V *Principiích* se Newton věnoval základům analýzy jen v malé míře, každopádně to bylo ale poprvé, co Newton veřejně představil své myšlenky ohledně infinitezimálního a diferenciálního počtu, včetně pojmu fluxe (dnes bychom řekli derivace). Mnohé kolovalo několik let v podobě rukopisů mezi přáteli a bylo publikováno později, často až po jeho smrti.[33]

V roce 1704 Newton publikoval *Optiku*. Do první edice této knihy byly přidány dvě malé práce, které neměly s optikou úzkou spojitost. Jedna byla o kubických křivkách, druhá o kvadratuře křivek a fluxích – *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis (Výčet křivek třetího řádu)* a *Tractatus de quadratura curvarum (Traktát o kvadratuře křivek)*. Byly to rukopisy, které Newtonovi žáci dobře znali už dříve. Newtonově klasifikaci křivek třetího stupně se budeme věnovat podrobněji, neboť vzhledem k našemu tématu jde o stěžejní spis počátku 18. století.

peculiarly found. Viz [Coo40, str. 128].

[32] *Philosophiae naturalis principia mathematica (Matematické základy přírodních věd)*, krátce *Principia*, Newton sepsal na naléhání Edmunda Halleyho. První vydání 1687, druhé vydání 1713, třetí vydání 1726, anglický překlad 1729. Čerpáme z anglického vydání [New99] - viz ukázka v tabulce 4.6.

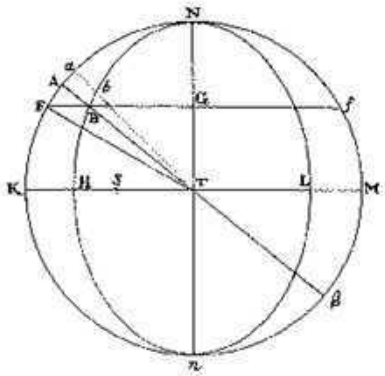
[33] Např. *De analysis per equationes numero terminorum infinitas (O analýze pomocí rovnic s nekonečným počtem členů)* – kolovalo mezi přáteli, publikováno 1711; *Methodus fluxionum et serierum infinitorum (Metoda fluxí a nekonečné řady)* – napsáno 1671, publikováno 1731.

ON THE MOTION OF THE NODES OF THE MOON

Proposition 1

The mean motion of the sun from the node is defined by a mean geometrical proportional between the mean motion of the sun and that mean motion with which the sun recedes most swiftly from the node in the quadratures.

Let T be the place where the earth is, N*n* the line of the nodes of the moon at any given time, KTM a line drawn at right angles to this line, and TA a straight line revolving around the center with the angular velocity with which the sun and the node recede from each other, in such a way that the angle between the straight line N*m* (which is at rest) and TA (which is revolving) is always equal to the distance between the places of the sun and of the node. Now, if any straight line TK is divided into parts TS and SK, which are to each other as the hourly mean motion of the sun is to the hourly mean motion of the nodes in the quadratures, and if the straight line TH is taken so as to be a mean proportional between the part TS and the whole TK, this straight line among the rest will be proportional to the mean motion of the sun from the node.



For describe a circle NK*n*M with center T and radius TK, and with the same center and the semiaxes TH and TN describe an ellipse NH*n*L, and in the time in which the sun recedes from the node through the arc N*a*, if the straight line T*ba* is drawn, the area of the sector NT*a* will represent the sum of the motions

Obrázek 4.6: Ukázka z Newtonových *Principií*, anglické vzdání [New99, str. 861])

4.3.1. *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis*

Práce *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis* původně vyšla v roce 1704 jako dodatek ke knize *Optika*, samostatně vychází teprve roku 1860 v anglickém překladu.[34] Autor anglického překladu v úvodu píše:

Publikovat a překládat pouhý text Newtonova pojednání bez vložení vysvětlení a obrázků by bylo neplodné a neužitečné počínání, neboť jeho styl je stručný a nesouvislý, téměř zatemněný, a jeho výroky nejsou doprovázené žádnými důkazy. [New60, str. iii]

V roce 1717 Stirling (viz odstavec 4.4.4) publikoval své komentáře k Newtonově práci pod názvem *Lineae Tertii Ordinis Neutonianae* a překladatel tyto komentáře hodně využívá. Jeho poznámky v úvodu nás jen znovu utvrzují v tom, že Newton v mnoha ohledech předběhl svou dobu. Práce se (ve srovnání s Descartovou) čte velmi dobře, odstup víc jak tři sta let není patrný.

Samotné Newtonovo pojednání tvoří jen 30 stran textu, který je rozdělen do sedmi částí:

- *Section I. The Orders of Linea* (Řády křivek), str. 7;
- *Section II. The Properties of Conic Section are analogous to to those of Curves of higher orders* (Vlastnosti kuželoseček jsou analogické vlastnostem křivek vyšších řádů), str. 8;
- *Section III. The Reduction of all Curves of the Second Genus to four Cases of Equations* (Redukce všech křivek druhého rodu do čtyř typů rovnic), str. 11;
- *Section IV. The Enumeratio of Curves* (Výčet křivek), str. 14;
- *Section V. The Generation of Curves by Shadows* (Generování křivek stíny), str. 25;

[34] Z. Nádeník píše, že *jako pravděpodobný důvod, proč svou práci o rovinných kubikách připojil ke knize obsahem zcela odlišné, se udává Newtonova snaha neohrozit svou prioritu. Samostatně vyšlo pojednání až v roce 1760.* [Fuc99, str. 150] Údaj 1760 je zde chybný. Samostatně vychází pojednání roku 1860 v Londýně. Z této edice také v celé práci vycházíme: Sir Isaac Newton's *Enumeration of Lines of the Third Oder, Generation of the Curves by Shadows, Organic Description of Curves, and Construction of Equations by Curves.* Translated from latin. With notes and examples. by C. R. M. Talbot, M. P. F.R.S., London, 1860. Sám editor v úvodu anglického vydání píše *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis původně vyšla jako dodatek ke knize Optika a pak v Opusculu a nebyla až dosud publikována samostatně.*

- *Section VI. Of the Organic Description of curves* (O přirozeném popisování křivek), str. 26;
- *Section VII. The Construction of Equations by the Descriptions of Curves* (Konstrukce rovnic popisováním křivek), str. 29.

Na straně 33 začínají podrobné poznámky k jednotlivým sekcím:

- *Notes to Section I. Orders of Linea* (Řády křivek), str. 7;
- *Notes to Section II.*
  - *Diameters* (Průměry), str. 35;
  - *Ratio of the Product of Ordinates and Abscissas (Poměr součinu ordinát a abscis)*, str. 38;
  - *Hyperbolic and Parabolic Branches* (Hyperbolické a parabolické větve), str. 41;
  - *Asymptotes* (Asymptoty), str. 42.
- *Notes to Section III.*
  - *Infinite Branches* (Nekonečné větve), str. 45;
  - *Hyperbola with six Branches* (Hyperbola o šesti větvích), str. 48;
  - *Diameters of Redundant Hyperbola* (Průměr redundantní hyperboly), str. 51;
  - *Absolute Diameters* (Absolutní průměry), str. 53.
- *Notes to Section IV.*
  - *Redundant Hyperbola without a Diameter* (Redundantní hyperbola bez průměru), str. 54;
  - *Hyperbola with a Diameter* (Hyperbola s průměrem), str. 56;
  - *Hyperbola with three Diameters* (Hyperbola se třemi průměry), str. 57;
  - *Hyperbola with Converging Asymptotes* (Hyperbola s konvergujícími asymptotami), str. 58;
  - *Defective Hyperbola* (Neúplná hyperbola), str. 58;
  - *Cissoid* (kisoida), str. 60;
  - *Parabolic Hyperbolas* (Parabolické hyperboly), str. 61;
  - *Hyperbolisms of the Conic Sections* (Hyperbolismy kuželoseček), str. 63;

  - *Witch* (Čarodějnice), str. 66;
  - *Trident* (Trojzubec), str. 67;
  - *Semicubic Parabolas* (Semikubické paraboly), str. 68;
  - *Cubic Parabola* (Kubická parabola), str. 70.

- *Notes to Section V. Generation of Curves by Shadows* (Generování křivek stíny), str. 72;
- *Notes to Section VI. Organic Description of curves* (Přirozené popisování křivek), str. 84;
- *Notes to Section VII. Construction of Equations by the Descriptions of Curves* (Konstrukce rovnic popisováním křivek), str. 85.

A následují další čtyři kapitoly přidané překladatelem:

- *Notes on the Analytical Parallelogram* (Poznámky k analytickému rovnoběžníku), str. 88;
- *Examples* (Příklady), str. 104;
- *Loci of the Third Order* (Množiny bodů třetího řádu), str. 112;
- *Problems* (Problémy), str. 125.

Newtonova klasifikace křivek 3. stupně *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis* začíná v sekci ***I. Řády křivek*** upřesněním Descartovy klasifikace algebraických křivek, které Newton stejně jako Descartes nazývá *geometrickými*. Křivky – poprvé v historii – třídí podle stupně rovnice a říká, že

Čárou prvního řádu bude přímka; čarami druhého nebo kvadratického řádu budou kuželosečky; a třetího nebo kubického řádu budou kubická parabola,[35] *Neilova parabola,*[36] *kisoida od starověkých*[37] *a jiné, které popíšeme.* [New60, str. 7]

[35] Objev kubické paraboly patří Descartovi – viz str. 120. Kubickou parabolou typu $y^3 = px$ se zabýval Johann Bernoulli roku 1698 a zjistil, jak se na této čáře najdou oblouky, jejichž rozdíl délek lze sestrojit kružítkem a pravítkem. Analogické vlastnosti eliptických oblouků objevil později G. Fagnano a z těchto objevů pak pramenila teorie eliptických integrálů. Viz [Fuc99, str. 139].

[36] Neilova parabola viz str. 138.

[37] Kisoidu poprvé popsal Diokles ve 2. století př. Kr., když se zabýval zdvojením krychle – viz str. 52.

K tomu Newton přidává klasifikaci podle rodu a píše o křivkách „nekonečného řádu“:

Křivka prvního rodu (přímku nepočítáme mezi křivky) je totéž jako čára druhého řádu, křivka druhého rodu je totéž jako čára třetího řádu a čára nekonečného řádu je taková, kterou přímka může protnout v nekonečně mnoha bodech jako spirála, cykloida, kvadratrix a každá čára generovaná nekonečně pokračujícím rotačním pohybem. [New60, str. 7]

Newtonův termín *řád (order)* geometrické čáry je analogický dnešnímu *stupeň* algebraické křivky. Termín *rod (genus)* křivky zavádí tak, že geometrická čára řádu (tj. stupně) n je křivka rodu $n-1$. Toto rozlišování křivek se mezi jeho následovníky neujalo, ale bylo přijato rozdělení na algebraické a transcendentní, jak najdeme i v poznámkách k překladu sekce I.

Diskutabilní je Newtonova definice křivek „nekonečného řádu“. Talbot v poznámkách k anglickému vydání rozebírá, že u kvadratrix v podobě, kterou znali starověcí učenci a Newtonovi předchůdci, není zřejmé, jak by měla být proťata přímkou v nekonečně mnoha bodech. První, kdo ukázal, že tato křivka má nekonečné větve byl v roce 1650 V. Leotaud.[38] Otázkou je, jak dalece se Newtonova představa blížila naší představě kvadratrix reprezentované rovnicí $y = x\mathrm{cotg}\frac{\pi x}{2a}$.[39]

Nabízí se úvaha, že Newton chtěl jen popsat „negeometrické“ (mechanické podle Descarta), tj. transcendentní křivky. Tento názor zastává Juškevič.[40] Je zřejmé, že tato definice zdaleka nepostihuje všechny transcendentní křivky, např. řetězovka[41] nebo exponenciála nebude mít s přímkou nekonečný počet průsečíků. Na druhé straně fakt, že tyto (a mnohé další) transcendentní křivky nebyly v letech 1667–68 popsány, nás nutí uvažovat i výklad Juškeviče.

Osobně se však domnívám, že z Newtonova textu nelze usuzovat na nic víc než na přirozené zobecnění jeho tvrzení, že kuželosečka bude proťata přímkou ve dvou bodech, křivka třetího stupně ve třech bodech, čtvrtého stupně ve čtyřech atd., potom křivka n-tého stupně v n bodech, což přirozeně vede k otázce, co se bude dít, když n půjde do neko-

[38] Vincent Leotaud (1595–1672).

[39] Odvození rovnice viz strana 44.

[40] *„Negeometrické“ křivky Newton nazývá čarami nekonečného řádu.* Viz [Juš70, str. 115]. Podotýkám však, že takové tvrzení jsem v Newtonově spise nenalezla a tento výklad mi připadá zavádějící.

[41] *Řetězovka (catenary)* je křivka, kterou vytvoří dokonale ohebné lano (řetěz) při zavěšení v jeho krajních bodech. Poprvé použil termín *catenary* Huygens v roce 1690 v dopise Leibnizovi. V roce 1691 se touto křivkou zabývali Leibniz, Huygens a Johann Bernoulli. Křivku lze vyjádřit rovnicí $y = a\cosh\frac{x}{a}$.

nečna. Na jedné straně tu máme algebraickou křivku $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + a_{n-2} x^{n-2} y^2 + \cdots + a_1 y^n + a_0 = 0$ na druhé straně transcendentní spirálu.

V sekci ***II. Vlastnosti kuželoseček*** [...] Newton ukazuje, že mnohé z důležitých vlastností kuželoseček mají své analogie v teorii kubických křivek. Zobecňuje pro kubiky pojmy průměr, osa, střed apod. Potom se věnuje asymptotám a nekonečným větvím.

Hyperbola[42] *prvního rodu bude mít dvě asymptoty; druhého rodu bude mít tři asymptoty, třetího rodu čtyři a ne víc atd. pro ostatní. A jako části libovolné přímky vyťaté hyperbolou*[43] *a její asymptotou jsou na každé straně shodné, tak v hyperbolách druhého rodu jestliže libovolná přímka bude protínat obojí, křivku a její tři asymptoty ve třech bodech, součet těch dvou segmentů sečny, které jsou kresleny z libovolných dvou asymptot na stejné straně ke dvěma bodům křivky bude stejný jako třetí část, která je kreslena od třetí asymptoty na opačnou stranu, k třetímu bodu na křivce.* [New60, str. 9]

Tyto věty jsou podrobně komentovány překladatelem, smysl je ovšem zřejmý z obrázku 4.8.

Před vlastní klasifikací křivek zavádí Newton pojem obecné hyperboly ve smyslu hyperbolické větve, která má přímkovou asymptotu v nekonečném bodě, a obecné paraboly, jejíž tečna v nekonečném bodě je přímka v nekonečnu. Počet asymptot nepřesahuje stupeň křivky. Zdůrazňuje, že kubická křivka musí mít minimálně jeden reálný bod v nekonečnu, tj. minimálně jednu asymptotu. Definuje také speciální body křivky – v dnešní terminologii singulární body křivky (uzlové body, body vratu a izolované body).[44]

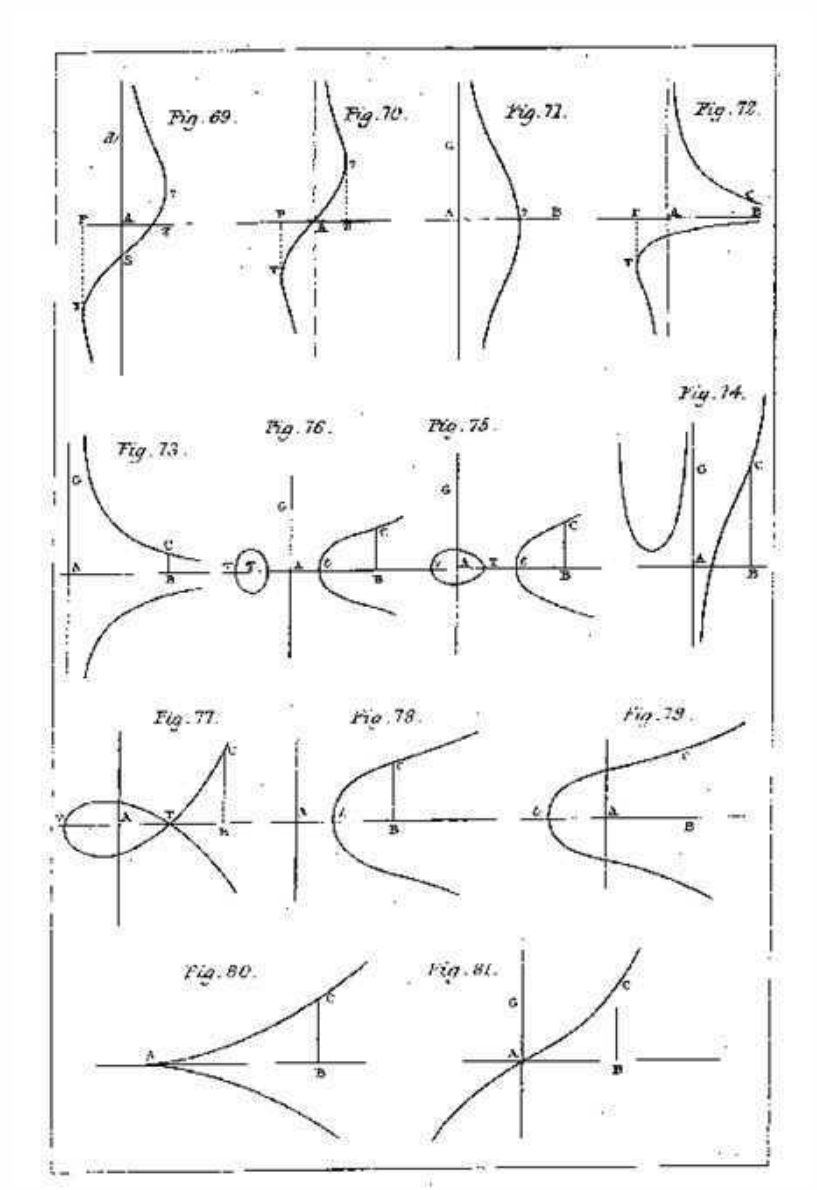
Všechny nekonečné větve křivek druhého a vyšších rodů, jako ty prvního,[45] *jsou buď hyperbolického nebo parabolického typu. Definuji hyperbolickou větev jako tu, která se konstantně blíží nějaké asymptotě, a parabolická větev je taková, která ačkoliv je nekonečná, nemá žádnou asymptotu. Tyto větve jsou jednoduše rozlišitelné svými tečnami; předpokládejme bod dotyku v nekonečnu, tečna hyperbolické větve se bude shodovat s asymptotou, ale tečna parabolické větve bude nekonečně vzdá-*

[42] Míněno *hyperbola* v obecném smyslu nekonečné větve křivky, která se blíží k asymptotě. Hyperbolické a parabolické větve Newton definuje o tři odstavce dále, na str. 10. Pozn. autorky.

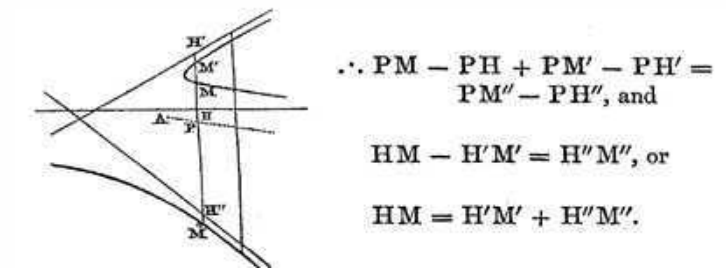
[43] Přičemž zde je uveden výraz *conic hyperbola* tj. hyperbola druhého stupně. Pozn. autorky.

[44] Termín *point singulier* zavedl v roce 1740 Malves – viz str. 159.

[45] Tj. jako u kuželoseček. Pozn. autorky.



Obrázek 4.7: Ukázka z Newtonova *An Enumeration of Lines of The Third Order*, vydání z roku 1860, [New60]



Obrázek 4.8: Vlastnosti kubických křivek, [New60, str. 37]

lená, mizí, a nebude nalezena. Asymptota libovolné větve je potom nalezena hledáním tečny v nekonečně vzdáleném bodě. [New60, str. 10]

Newtonem popsané metody k určení asymptoty používáme dodnes. Newton svá tvrzení nedoprovází žádnými výpočty nebo příklady a tak se text z pohledu roku 1860 mohl skutečně jevit *stručný a nesouvislý, téměř zatemněný.*[46] V komentářích jsou této části věnovány více než čtyři strany.

V sekci ***III. Redukce všech křivek druhého rodu do čtyř typů rovnic*** Newton nejprve uvádí tvrzení, že

všechny čáry prvního, třetího, pátého, sedmého, nebo sudého řádu, mají nejméně dvě nekonečné větve ubíhající do opačných směrů; a všechny čáry třetího řádu mají dvě větve stejného druhu jdoucí do opačných směrů, jejichž směrem nejdou jiné nekonečné větve, (kromě Descartovy paraboly). [New60, str. 11]

Potom postupně ukáže, že transformacemi, kdy volíme osu y jako jednu z asymptot, lze všechny kubické křivky redukovat do jednoho ze čtyř typů

$$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad \text{(Typ I)}$$
$$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad \text{(Typ II)}$$
$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad \text{(Typ III)}$$
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad \text{(Typ VI)}$$

kde a, b, c, d, e jsou parametry, které mohou být kladné i záporné a *mohou i chybět, pak tedy by obrázek, z důvodu jejich absence, neměl být modifikován do kuželosečky.*[47]

[46] Viz [New60, str. iii].

[47] Viz [New60, str. 11]. Tj. parametry a, b, c, d, e mohou být rovny nule, ale ne tak, aby rovnice Typu I–VI přešla v rovnici kuželosečky.

Dnes bychom řekli, že Newton použil pro křivku třetího stupně o obecné rovnici

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2 + 6Fxy + \\ + 3Gy^2 + 3Hx + 3Ky + L = 0 \tag{4.18}$$

transformace

$$x' = x,\ y' = p\frac{y}{x}.$$

V odstavci *The Names of Curves* nejsou zaváděny názvy konkrétních křivek, ale jen názvy různých typů hyperbolických a parabolických větví.

Po těchto úvodních odstavcích v sekci ***IV. Výčet křivek*** komentuje Newton své detailní rozdělení kubických křivek, každý typ je opatřen nákresem a jsou rozebrány možnosti existence dvojných bodů, izolovaných oválů apod. Newton uvádí bez důkazu, že všech možných typů je 72. Dnes víme, že je jich 78. Čtyři chybějící byly doplněny Stirlingem[48] v roce 1717, jednu přidal ještě v roce 1731. Jednu popsal Nicholas Bernoulli[49] také v roce 1731.

Svoji klasifikaci Newton založil na rozlišení vztahů mezi kořeny charakteristických rovnic, kdy k typu I je přiřazena charakteristická rovnice

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{e}{x} = 0$$

a k typům II – IV charakteristická rovnice

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Nechť přímka $y = kx + b$ je asymptotou křivky (4.18), tj. počet nevlastních průsečíků této přímky s křivkou (4.18) určí počet nekonečných větví křivky.

Odtud pro $x \to \infty$ obdržíme[50]

$$A + 3Bk + 3Ck^2 + Dk^3 = 0, \tag{4.20}$$

$$(B + 2Ck + Dk^2)b = -(E + 2Fk + Gk^2). \tag{4.21}$$

[48] Viz odstavec 4.4.4.

[49] Nicholas Bernoulli (1687–1759).

[50] Z dnešního pohledu lze snadno nahlédnout, že rovnice (4.18) po dosazení a vydělení x^3 přejde ve tvar

$$A+3Bk + \frac{3Bb}{x} + 3Ck^2 + \frac{6Ckb}{x} + \frac{3Cb^2}{x^3} + Dk^3 + \frac{3Dk^2b}{x} + \frac{3Dkb^2}{x^2} + \frac{3Db^3}{x^3} + \\ + \frac{3E}{x} + \frac{6Fk}{x} + \frac{6Fb}{x^2} + \frac{3Gk^2}{x} + \frac{6Gkb}{x^2} + \frac{3Gb^2}{x^3} + \frac{3H}{x^2} + \frac{3Kk}{x^2} + \ldots = 0. \tag{4.19}$$

Tyto metody však používá poprvé až Euler. Newton a další angličtí matematici užívají tzv. „Newtonův rovnoběžník“.

Kořeny kubické rovnice (4.20) mohou být buď tři reálná čísla k nebo jedno reálné a dvě komplexní. Přičemž kořeny mohou být násobné. Řešení rovnice (4.20) tedy určí počet nekonečných větví křivky (4.18). Z toho ovšem neplyne, že tímto způsobem určené větve křivky mají asymptoty. Aby existovala asymptota pro větev odpovídající kořenu $k = k_1$, $k_1 \in \mathbb{R}$, je nutné, aby rovnice (4.21) měla odpovídající řešení $b = b_1$ (kde b je druhý parametr v rovnici asymptoty). Tedy

(1) Pokud pro reálný kořen $k = k_1$ rovnice (4.20) existuje reálný kořen b_1 rovnice (4.21), pak příslušná asymptota bude tvaru

$$y = k_1 x + b_1$$

a říkáme, že větev křivky (4.18) je **hyperbolického typu**.

(2) Pokud pro reálný kořen $k = k_1$ rovnice (4.20) neexistuje reálný kořen b_1 rovnice (4.21), příslušná větev nemá asymptotu[51] a říkáme, že větev křivky (4.18) je **parabolického typu.**

Tedy počet větví určí rovnice (4.20) a charakter větve rovnice (4.21).

Na základě těchto úvah Newton rozdělil křivky třetího stupně nejprve do 7 tříd, přičemž Typ I obsahuje 4 třídy. Třídy uvádíme s původními názvy v latině:

Typ I

- **Třída 1. Hyperbolae redundantes (redundantní hyperboly)** Rovnici (4.18) lze vyjádřit ve tvaru

$$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a > 0$$

Všechny tři kořeny rovnice (4.20) jsou reálné a různé, křivka má tři asymptoty a tři větve hyperbolického typu.[52]

[51] V případě, že

$$B + 2Ck + Dk^2 = 0,\ E + 2Fk + Gk^2 \neq 0$$

rovnice (4.21) nemá řešení nebo v případě

$$B + 2Ck + Dk^2 = 0,\ E + 2Fk + Gk^2 = 0,$$

kdy je řešením rovnice (4.21) neurčitý výraz, tj. příslušná větev nemá asymptotu.

[52] Pokud jsou všechny tři kořeny rovnice (4.20) reálné a různé, bude vždy $B+2Ck+Dk^2 \neq 0$.

- **Třída 2. Hyperbolae defectivae (defektivní hyperboly)**
  Rovnici (4.18) lze vyjádřit ve tvaru

$$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a < 0$$

  Rovnice (4.20) má jeden reálný kořen, křivka má jednu asymptotu a jednu větev hyperbolického typu.[53]

- **Třída 3. Hyperbolae parabolicae (parabolické hyperboly)**
  Rovnici (4.18) lze vyjádřit ve tvaru

$$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a = 0,\ b \neq 0.$$

  Rovnice (4.20) má dvonásobný kořen, který však nevyhovuje rovnici $E + 2Fk + Gk^2 = 0$; křivky mají dvě nekonečné větve různého typu, ale jen jednu asymptotu.

- **Třída 4. Hyperbolismi sectionum conicarum (hyperbolické řezy kužele)**
  Rovnici (4.18) lze vyjádřit ve tvaru

$$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a = 0,\ b = 0.$$

  Rovnice (4.20) má dvonásobný kořen vyhovující rovnici $E + 2Fk + Gk^2 = 0$; křivky mají jednu, dvě nebo tři asymptoty, z nichž dvě jsou rovnoběžné.

Typ II

- **Třída 5. Tridens (trojzubec)**
  Rovnici (4.18) lze vyjádřit ve tvaru

$$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

  Rovnice (4.20) má trojnásobný kořen vyhovující rovnici $E + 2Fk + Gk^2 = 0$, ale nevyhovuje rovnici $F + Gk = 0$; křivka má dvě nekonečné větve a jednu asymptotu.

Typ III

- **Třída 6. Parabolae divergentes (divergentní paraboly)**
  Rovnici (4.18) lze vyjádřit ve tvaru

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

[53] Pokud má rovnice (4.20) jen jeden reálný kořen k_1, pak $B + 2Ck_1 + Dk_1^2 \neq 0$.

Rovnice (4.20) má trojnásobný kořen, který nevyhovuje rovnici $E + 2Fk + Gk^2 = 0$; křivka má jednu větev parabolického typu, asymptotu nemá.

Typ IV

- **Třída 7. Parabola cubica (kubická parabola)**
  Rovnici (4.18) lze vyjádřit ve tvaru

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

  Rovnice (4.20) má trojnásobný kořen, který vyhovuje rovnici $E + 2Fk + Gk^2 = 0$ i rovnici $F + Gk = 0$.

V dalších sekcích Newton rozvíjí také některé důležité myšlenky projektivní geometrie, přičemž lze téměř s jistotou tvrdit, že neznal dřívější pojednaní Desarguese ani Pascala (viz odstavec 3.2.2). V sekci ***V. Generování křivek stínem*** uvádí pozoruhodnou větu:

Stejným způsobem jako kružnice projekcí svého stínu generuje všechny kuželosečky, tak pět divergentních parabol svými stíny generuje všechny křivky druhého rodu. [New60, str. 25]

Formulováno v dnešní termonologii:

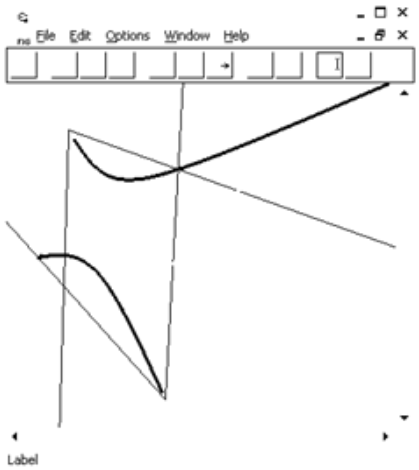
Věta 4.1. Všechny typy křivek třetího stupně obdržíme středovým promítáním pěti divergentních parabol.

Tj. zatímco libovolnou kuželosečeku můžeme obdržet jako řez na kuželi, jehož řídící křivkou je kružnice, tak libovolnou kubickou křivku můžeme obdržet jako řez na kuželi, jehož řídící křivkou je kubika typu III

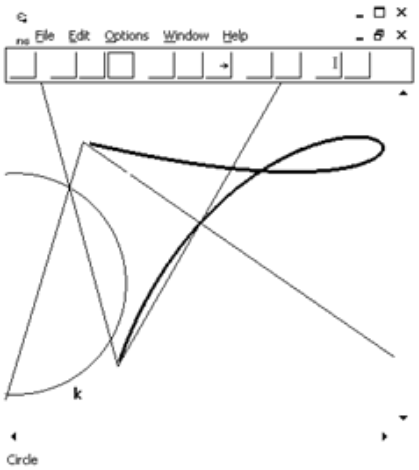
$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Těmto pěti divergentním parabolám odpovídají křivky 76–80 na obrázku 4.7 na str. 150. Důkaz Newton neuvedl, a tak tato věta zůstala nevyřešenou hádankou do roku 1731, kdy její platnost ukázali Nicole[54] a Clairaut (viz odstavec 4.4.5). Lepší důkaz pak podal Murdoch v roce 1740, který využil klasifikace křivek 3. stupně do pěti typů podle toho, jak vypadají průsečíky s osou x, tj. jaké budou kořeny odpovídající kubické rovnice – reálné různé, reálné a jeden dvojnásobný (dva typy), jeden trojnásobný kořen nebo dva reálné a jeden imaginární.

[54] François Nicole (1983–1758).



(a) Jsou dány úhly ABC a CDE. Jestliže se průsečík ramen těchto úhlů, bod C, pohybuje po přímce c, pak průsečík druhých dvou ramen, bod P, opisuje kuželosečku.



(b) Jsou dány úhly ABC a CDE. Jestliže se průsečík ramen těchto úhlů, bod C, pohybuje po kuželosečce k, pak průsečík druhých dvou ramen, bod P, opisuje křivku třetího stupně.

Obrázek 4.9: Newtonovo tzv. „přirozené“ opisování křivek

V sekci ***VI. O přirozeném opisování křivek*** Newton dále pokračuje tím, že rozvíjí kinematické metody Descarta a Schootena a věnuje se tzv. „přirozenému“ opisování křivek:

Tvrzení. Uvažujme dva úhly dané velikosti, které se otáčejí kolem svých vrcholů. Jestliže se bod průniku jednoho páru ramen těchto úhlů pohybuje při jejich otáčení po přímce, potom bod průniku druhých dvou ramen opisuje kuželosečku (viz obr. 4.9(a)).

Řečeno dnešními slovy: Kuželosečka je vytvořena jako množina průsečíků odpovídajících si přímek dvou projektivních svazků.[55] Tuto větu Newton dokázal v *Principiích* synteticky a v *Obecné aritmetice* analyticko–geometricky. Přirozené opisování křivek sloužilo Newtonovi jako jeden z prostředků řešení úlohy o vytvoření kuželosečky zadané pěti podmínkami (např. pěti body, pěti tečnami, tečnami s body dotyku apod.).

Stejná otázka zajímala i Pascala a pomocí jeho věty (viz str. 100) se lehce řeší. Newton na tuto otázku narazil, když chtěl určit parabolickou dráhu komety.

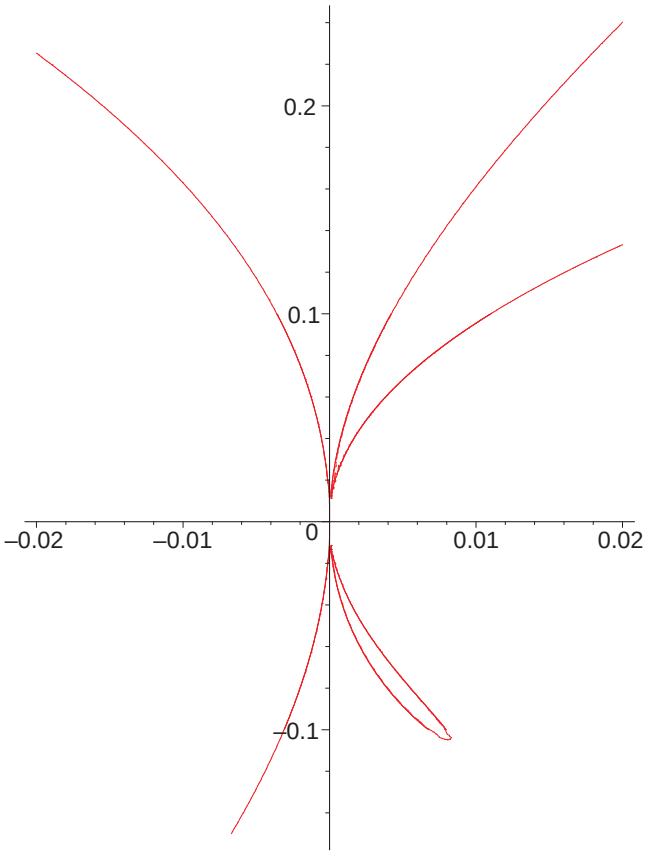
Newton v *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis* rozšiřuje postupy přirozeného opisování křivek na křivky vyššího stupně:

[55] Teorii projektivních svazků vytvořil Jacob Steiner (1796–1863) až v roce 1822.

Tvrzení. Uvažujme dva úhly dané velikosti, které se otáčejí kolem svých vrcholů. Jestliže se bod průniku jednoho páru ramen těchto úhlů pohybuje při jejich otáčení po kuželosečce, potom bod průniku druhých dvou ramen opisuje křivku třetího stupně nebo čtvrtého s dvojnými body (viz obr. 4.9(b)).

Je zde také uvažována úloha o křivce třetího stupně procházející sedmi danými body, z nichž jeden je dvojný. V sekci ***VII. Konstrukce rovnic popisováním křivek*** jsou uvedeny některé ukázky využití křivek třetího stupně k sestrojení kořenů rovnic.

V Newtonově spise *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis (Výčet křivek třetího řádu)* je poprvé v historii použita Descartova analytická geometrie pro vytvoření nového systematicky utříděného celku – teorie kubických křivek.



Obrázek 4.10: Křivka o rovnici (4.22) s trojným bodem v počátku

Závěrem poznamenejme, že Newton také jako první aplikoval na studium rovinných křivek nekonečné řady. Přivedl ho k tomu jeho výrazný sklon k praktickému významu matematických objevů. V traktátu napsaném nejpozději v roce 1669, ale publikovaném až 1685 v knize Wallise,[56] se mimo jiné zabýval řešením rovnice

$$y^6 - 5xy^5 + x^2y^4 - 7x^2y^2 + x^4 + 6x^3 = 0, \tag{4.22}$$

což je křivka šestého stupně, která má v počátku trojný bod s jedinou tečnou v ose y (viz obr. 4.10). Metody, jimiž Newton řešil rovnice vyšších stupňů a které iniciovaly další studium algebraických rovnic, přesahují rámec našeho tématu.[57]

4.4. Newtonovi nástupci

Systematický výklad křivek třetího stupně přirozeně vybízel k pokusům o systematizaci křivek stupně čtvrtého a zkoumání křivek vyšších stupňů přitáhlo pozornost k singulárním bodům, jejichž jednodušší případy byly známy už dříve. Zajímavé práce na tato témata pochází už od Newtonových současníků a pokračují v nich další generace.

4.4.1. Maupertuis, Bragelone

Maupertuis[58] a který se ukázal být z obecných geometrických úvah bez konkrétních vypočtů přišel k závěru, že inflexní body i body vratu algebraických křivek vyšších stupňů se mohou střídavě objevovat v různých kombinacích.[59]

Bragelone[60] publikoval obecnou práci, která měla představovat klasifikaci křivek čtvrtého stupně po vzoru Newtona.[61] Studoval vlastnosti, které se mohou speciálně vyskytovat u křivek čtvrtého stupně, ale jeho výčet těchto vlastností nebyl úplný. Jím poprvé byl zkoumán izolovaný bod sebedotyku křivky, který nazval „nekonečně malou lemniskatou“. Bragelone zkoumal také vícenásobné body a inflexní body vyšších řádů.

[56] Viz [Fuc99, str. 151].
[57] Podrobněji viz např. [Byd48].
[58] Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759).
[59] *Sur quelques affections des courbes (O některých vlastnostech křivek)*, Mém. Ac. Paris, 1731 (1729).
[60] Christophle Bernard de Bragelone (1688–1744).
[61] Mém. Ac. Paris, 1732 (1730), 1734 (1731).

4.4.2. Jean Paul de Gua de Malves

Singulární body algebraických křivek studoval také Gua De Malves[62] v práci z roku 1740 *Usages de l'analyse de Descartes pour découvrir, sans le secours du calcul différentiel, les propriétés, ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres (Použití Descartovy analýzy k nalezení hlavních vlastností křivek všech řádů bez užití diferenciálního počtu).* Jak je patrno z názvu knihy, snažil se ukázat přednosti metod analytické geometrie nad metodami diferenciálního počtu při řešení úloh teorie algebraických křivek. Tvrdil, že diferenciální počet je vhodné používat jen při studiu transcendentních křivek, avšak někdy pro zkrácení výpočtu sám diferenciální počet používal i při studiu algebraických křivek. Například rovnici pro vyjádření středu kuželosečky

$$nyy + rxy + mxx + ay + bx + cc = 0,$$

převedl na tvar

$$\overline{2ny + rx + a}\,\mathrm{d}y + \overline{2mx + ry + b}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Stěžejní v jeho práci bylo studium singulárních bodů křivek, je zde i uveden termín *point singulier*. Používal metodu posunutí počátku souřadnic do singulárního bodu $[p, q]$ pomocí transformace

$$\begin{aligned} x &= p + z + nu, \\ y &= q + mu, \end{aligned}$$

potom osu x uvažoval jako pevnou a změnou m, n pohyboval osou y. Objevil přitom, že singulární bod v počátku souřadnic leží na jedné nebo několika křivkách

$$y^m = ax^{\pm n}.$$

Udělal ovšem chybu, když neuvažoval, že u algebraických křivek mohou existovat i body vratu druhého druhu, o kterých psal Maupertuis, a předpokládal, že už první člen rozkladu ve všech případech plně charakterizuje větve křivky. Tuto chybu odhalil až Euler (viz str. 176).

Gua de Malves uvažoval také nekonečně vzdálené body jako singulární body, které je možno převést v obyčejné singulární body projekcí. Pro převod těchto bodů do počátku souřadnic použil transformaci

$$x = \pm\frac{pq}{y},\ y = \pm\frac{pu}{z},$$

[62] Jean Paul de Gua de Malves (1712–1785).

kde p, q jsou konstanty a u, z nové souřadnice. Jde v podstatě o transformaci projektivních souřadnic v projektivní rovině. Projektivní pohled ho přivedl k tvrzení:

Tvrzení. Jestliže křivka třetího stupně má tři inflexní body, pak tyto body nutně leží na přímce.[63]

Poznamenejme ještě, že zkoumal detailně i Cassinim popsané křivky čtvrtého stupně (viz odstavec 4.2.1) a dokonce uvažoval rovnici

$$y^2 + x^2 + 2bx + b^2 = 0$$

jako rovnici páru imaginárních přímek $y = \pm i(x + b)$.

4.4.3. Colin Maclaurin

Newtonův způsob zobrazování křivek se dočkal značného rozpracování v knize Maclaurina[64] *Geometrica organica sive descriptio linearum curvarum universalis (Přirozená geometrie nebo-li univesální vykreslování křivek)* z roku 1720. Maclaurin také dokázal mnohé Newtonovi konstrukce a přidal konstrukce nové. Zkoumal generování křivek pomocí úhlů dané velikosti, jejichž vrcholy se pohybovaly po přímkách a křivkách různých stupňů, a ve spojení s tím zformuloval větu:

Věta 4.2. Dvě algebraické křivky m-tého a n-tého stupně se protínají maximálně v $m \cdot n$ bodech.

Současné znění[65] této větě dal Euler v roce 1748, když přidal imaginární body a nekonečně vzdálené průsečíky křivek. Stejná věta byla nalezena také později v rukopisech Newtona, je patrně z roku 1667.[66] Další upřesnění věty 4.2 s ohledem na vlastnosti průsečíků, které jsou násobnými body křivek, podal v roce 1764 É. Bézout.[67] Od něj pochází také zobecnění této věty na průnik ploch v trojrozměrném prostoru.

V další Maclaurinově práci, která vyšla až posmrtně v roce 1748, *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus (O obecných vlastnostech geometrických křivek)* je mnoho tvrzení o protínání křivek třetího stupně s přímkami a o tečnách ke křivkám v jejich průsečících s přímkami. Je zde dokázána např. také věta:

[63] Tato věta byla nalezena také v posmrtně vydaném spise Maclaurina – viz odstavec 4.4.3.

[64] Colin Maclaurin (1698–1746).

[65] Současné znění věty 4.2: Počet bodů, v nichž se protínají dvě algebraické křivky, je roven součinu stupňů jejich rovnic.

[66] *The mathematical papers of Isaac Newton*, ed. D. T. Whiteside, Cambridge, 1968, str. 177.

[67] Étienne Bézout (1730–1783).

Věta 4.3. Jestliže vedeme z daného bodu P v rovině několik přímek protínajících algebraickou křivku (takové přímky se nazývají *transverzály*), potom suma převrácených hodnot vzdáleností od bodu P k bodům průsečíků jedné z tranverzál s křivkou je rovna sumě převrácených hodnot vzdáleností od tohoto bodu k bodům průseku té stejné tranverzály s tečnami ke křivce sestrojenými v bodech jejího průniku s druhou transverzálou (viz obr. 4.11).

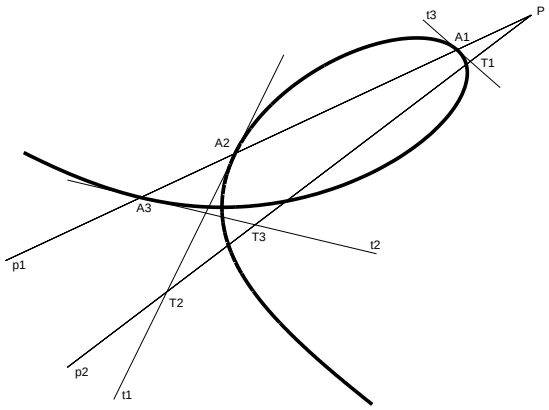
Maclaurin dokázal také větu, kterou vyslovil R. Cotes:[68]

Tvrzení. Harmonický střed M průsečíků transverzály PA s křivkou $A, B, C, \ldots$, tj. takový bod M, pro který platí

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} + \cdots ,$$

se při otáčení transverzály kolem bodu P bude pohybovat po přímce.

Tato přímka byla později nazvána polárou bodu P.



Obrázek 4.11: Příklad k větě 4.3. Pro křivku třetího stupně proťatou transverzálami p_1, p_2 platí:
$\frac{1}{PA_1} + \frac{1}{PA_2} + \frac{1}{PA_3} = \frac{1}{PT_1} + \frac{1}{PT_2} + \frac{1}{PT_3}$.

Na závěr uveďme ještě jednu významnou Maclaurinovu větu týkající se invariantů rovinných algebraických křivek, která i dnes tvoří součást klasické teorie křivek:

[68] Roger Cotes (1682–1716).

Věta 4.4. Počet jednoduchých nezávislých podmínek určujících rovinnou křivku stupně n je

$$N = \frac{n(n+3)}{2} = \binom{n+2}{2} - 1.$$

Tento výsledek je speciálním případem obecnější věty:

Věta 4.5. Počet jednoduchých nezávislých podmínek určujících nadplochu stupně n v m-rozměrném projektivním prostoru je

$$N = \binom{n+m}{m} - 1.$$

Maclaurin také shrnul některé poznatky W. Braikenridgeho[69] uvedené v jeho pojednání z roku 1733 *Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum (Geometrická etuda o vykreslování křivek).*

4.4.4. James Stirling

Newton v *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis* neuvádí důkazy, ale mnohá jeho tvrzení byla dokázána v knize Stirlinga[70] *Lineae tertii ordinis Newtonianae (Newtonovy křivky třetího stupně)* z roku 1717. Kromě toho zde Stirling uvádí další svoje výsledky týkající se křivek. Např. vyslovil téměř současně s Hermannem tvrzení o počtu koeficientů rovnice algebraické křivky n-tého stupně (viz str. 134) a odtud vyvodil:

Tvrzení. Křivka n-tého stupně je určena $\frac{n(n+3)}{2}$ body.

Dále Stirling určil možný počet nekonečných větví křivek sudých a lichých stupňů, asymptoty křivek a všiml si, že stupeň u y v rovnici křivky lze redukovat v případě, když osa y je rovnoběžná s asymptotou křivky. Studoval také asymptoty obecně a průměry křivek vyšších stupňů, tj. takové přímky, že je-li tato přímka x-ovou osou v nějakém obecně kosoúhlém systému souřadnic, pak součet všech y-ových souřadnic bodů křivky se stejnou x-ovou souřadnicí je roven nule. Stirling ukázal, že rovnice křivky v takovém systému souřadnic neobsahuje $(n-1)$-ní mocninu y. Stirling používal při studiu křivek vyjádření y-ové souřadnice pomocí x.

K Newtonovu výčtu 72 typů křivek třetího stupně přidal pět dalších. Zdůrazňoval analogii mezi teorií křivek 2. a 3. stupně. Pomocí těchto analogií dospěl např. k analytickému důkazu Newtonovy věty:

[69] William Braikenridge (1700 – 1769).
[70] James Stirling (1692–1770).

Tvrzení. Je dán pevný bod O. Jestliže tímto bodem vedeme dvě přímky a, b, které protínají křivku třetího stupně v bodech A_1, A_2, A_3 a B_1, B_2, B_3, potom podíl součinu velikostí úseček vyťatých na přímkách a a b je konstantní a nezávislý na poloze bodu O, tj.

$$\frac{|OA_1| \cdot |OA_2| \cdot |OA_3|}{|OB_1| \cdot |OB_2| \cdot |OB_3|} = konst. \tag{4.23}$$

Poznamenejme, že od Newtona pochází i obecnější formulace:

Tvrzení. Jsou dány dva pevné body O a P. Jestliže těmito body vedeme rovnoběžné přímky r, s, které protínají křivku n-krát v bodech $R_1, R_2, \ldots, R_n$ a $S_1, S_2, \ldots, S_n$, potom podíl součinu velikostí úseček OR_i, $i = 1, \ldots, n$, vyťatých na přímce r a velikostí úseček PS_i, $i = 1, \ldots, n$, vyťatých na přímce s je konstantní a nezávislý na rovnoběžkách, tj.

$$\frac{|OR_1| \cdot |OR_2| \ldots |OR_n|}{|PS_1| \cdot |PS_2| \ldots |PS_n|} = konst. \tag{4.24}$$

4.4.5. Alexis Clairaut

Stirling podal mimořádně cenné komentáře k práci Newtona, ale nemohl dokázat jednu z nejdůležitějších vět (viz věta 4.1) to udělal až Clairaut.[71] Clairautův přínos pro geometrii byl neobyčejný. Už ve svých 12 letech překvapil pařížské akademiky prací o některých křivkách čtvrtého stupně.[72]

Protože některé úlohy v Clairautově spise z roku 1731 *Recherches sur les courbes à double courbure (Pojednání o křivkách s dvojí křivostí)* jsou řešeny metodami diferenciální geometrie, budeme se mu podrobněji věnovat v následujícím odstavci.

4.5. Počátky diferenciální geometrie křivek

Připomeňme Descartův názor o vztahu mezi přímkou a křivkou

[...] *poměr, který je mezi přímými a křivými není znám, a myslím si, že ani lidmi poznán být nemůže, nebylo by možno vyvodit nic, co by bylo přesné a jisté;* [...] [Des37, str. 340–341]

[71] Alexis Claude Clairaut (1713–1765).

[72] V jeho autorství prý uvěřili teprve po té, co jim správně zodpověděl všechny otázky, které mu položili. Viz [Juš72, str. 160].

Těžko dnes soudit, zda Descartes svou geniální intuicí předpovídal to, co bylo dokázáno teprve roku 1882. Najít poměr mezi *mezi přímými a křivými* v podstatě znamená najít k dané křivce úsečku stejné délky, tj. rektifikovat křivku. Některé křivky rektifikovat lze, ale např. provést rektifikaci kružnice přesně nelze. Znamenalo by to najít úsečku délky 2π. Aby bylo možno takovou konstrukci provést přesně,[73] muselo by číslo π být číslo algebraické.[74] Roku 1882 však bylo dokázáno, že číslo π je transcendentní.[75] Každopádně ze 17. a 18. století pochází řada postupů užívajících výpočtů vedoucích k dostatečně přibližným výsledkům. Rektifikace křivek patřila spolu s konstrukcí tečen, normál apod. také k důležitým úlohám, na nichž se formovaly a ověřovaly počátky infinitezimálního počtu.

Nejstarší případ rektifikace algebraické křivky je rektifikace semikubické paraboly (viz str. 138). Wallisem uveřejněný výsledek z roku 1659 bychom v dnešní symbolice zapsali následovně: Délka oblouku semikubické paraboly v intervalu $< 0, x >$ pro $p = 1$ je

$$\int_0^x \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{27}[(1 + \frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}} - 1].$$

Na přelomu 17. a 18. století se objevuje také snaha připojit ke každé křivce funkci, která říká, jak moc se křivka v každém bodě „ohýbá“. Stupeň ohybu udává tzv. křivost křivky. V roce 1684 Leibniz publikoval *Meditatio nove de natura anguli contactus et osculi (Nové zamyšlení o povaze úhlů styčných a dotykových)*, kde podává první myšlenky o křivosti.

Stejně jako je přímka vhodná pro určení směru, protože její směr je všude stejný, je kružnice vhodná pro určení křivosti, protože její křivost je všude stejná. [Gra94, str. 332]

Leibniz uvažoval danou křivku jako *osculovanou* kružnicí v každém bodě.[76] Kompletní teorii osculací později rozvinul Jacob Bernoulli.

Dříve než Leibniz našel analytické vyjádření křivosti Newton, ale jeho výsledky byly publikovány mnohem později, teprve roku 1736 v *Method of fluxions (Metodě fluxí)*.

[73] Míněno algebraicky přesně, nikoliv použít některou z přibližných metod, které jsou dobře známy z technické praxe.

[74] Algebraické číslo je takové číslo, které lze získat jako kořen nějaké algebraické rovnice s racionálními koeficienty.

[75] Důkaz podal K. L. F. Lindemann (1852–1939) a lze ho najít např. v [Fuc87, str. 112–113].

[76] Od Leibnize tedy pochází termín oskulační kružnice, z latinského *osculare* – líbat.

Kružnice křivosti je kružnice s vlastností, že není možné nakreslit jinou kružnici, která by byla v úhlu mezi křivkou a kružnicí. Říkáme, že křivka má v bodě dotyku stejnou křivost jako tato kružnice. [Gra94, str. 332]

Newton vypočítal její poloměr na základě vyšetřování normál křivky ve třech nekonečně blízkých bodech

$$r = \frac{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{z}},$$

kde $z = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, přičemž symbol tečka označuje to, co dnes nazýváme derivací.

Newton uvažoval jen rovinné křivky. Prvním rozsáhlým pojednáním o křivkách prostorových byl až Clairautův spis z roku 1731 *Recherches sur les courbes à double courbure (Pojednání o křivkách s dvojí křivostí)*,[77] který byl pařížské akademii předložen už v roce 1729. Byl jedním z prvních pokusů o diferenciální geometrii křivek a obsahuje patrně první soustavnou aplikaci analytické geometrie na prostorové útvary. Clairaut definuje prostorové křivky jako průsečnice dvou válcových ploch a analyticky je vyjádřil soustavou rovnic. Bez zábran a v plném rozsahu Clairaut kromě rovnice koule, rotačního kužele a rotačního paraboloidu odvodil rovnice některých složitějších rotačních ploch – elipsoidu, jednodílného rotačního hyperboloidu a plochy vznikající rotací paraboly kolem tečny ve vrcholu. Nalezl rovnici kužele s daným vrcholem a řídící křivkou, ve speciálních případech uvažoval paraboly, hyperboly a elipsy vyšších řádů. Všiml si, že v případě, kdy vrchol je v počátku souřadnic, je rovnice homogenní.

Pozoruhodné pojednání o křivosti křivek a ploch je dílem L. Eulera (viz odstavec 5.2.1).

4.6. Odkaz „století křivek“ pro další vývoj

V předchozí kapitole jsme byli svědky zrodu mocného nástroje ke zkoumání křivek (a geometrických objektů obecně) – analytické geometrie. Descartova a Fermatova analytická geometrie nejen že poskytla metodu kvantitativního zvládnutí geometrických tvarů, ale umožnila vytvářet geometrické křivky do té doby neznámé a obrátila tímto směrem pozornost geometrů. Historikové matematiky se však všeobecně shodují

[77] Termín „křivka s dvojí křivostí“ pochází ze skutečnosti, kterou předpokládal už Descartes, že prostorová křivka je určena svými dvěma průměty do dvou k sobě kolmých průměten; poprvé tento termín předložil pařížský akademik Henri Pitot (1695–1771) v Mém. Ac. Paris v roce 1727 (1726), aby zdůraznil podstatný rozdíl mezi šroubovicí na válci a spirálou v rovině. Viz [Juš72, str. 175].

v tom, že *La Géométrie* předběhla svou dobu a pro současníky přinášela těžkosti. Rozšířila se až po překladu do latiny a komentování dalšími učenci, kteří Descartovy myšlenky rozepsali a dali jim systematičtější výklad (viz odstavec 4.1.1). Trvalo minimálně padesát let než byla Descartova (a Fermatova) metoda plně pochopena a využívána.[78] Lze říci, že teprve kniha l'Hospitala vydaná v roce 1695 (viz odstavec 4.1.2) vnáší Descartovu metodu do všeobecného povědomí a první, kdo ji pochopil v celém rozsahu a dále rozvíjel, byl Isaac Newton. Je třeba si uvědomit, že ve druhé polovině 17. století v podstatě fungovaly jen dva prostředky komunikace mezi vědci – knihy a dopisování. Mnozí autoři nespěchali s uveřejňováním svých výsledků, k tomu docházelo často až po mnoha letech nebo dokonce po jejich smrti. Situace se začala pozvolna měnit se zakládáním vědeckých akademií, které vydávaly zprávy o svých zasedáních.[79]

V letech 1649–1748 se dostaly do popředí zájmu matematické problémy spojené s určováním tečen a normál křivek, inflexních bodů, křivosti křivek atd. Starý geometrický způsob byl nedostačující. V souvislosti s příchodem pojmů, které charakterizovaly přírustky veličin o nekonečně malé hodnoty se stále více prosazoval algebraický způsob zápisu, který vyústil v diferenciální rovnice v Leibnizově škole a v rovnice s fluxemi ve škole Newtonově. Lebniz zavádí infinitezimální metody právě na geometrickém modelu, což podpořilo diferenciálně geometrické úvahy.

Je zajímavé, že podobně jako Descartes také Newton byl přesvědčen, že hlavní význam geometrických (tj. algebraických) křivek je v jejich využití pro řešení algebraických rovnic hledáním průsečíků.[80] Newtonův přínos pro studium křivek a jeho další využití jsme nastínili v sekci 4.3. Jako první (a v sedmnáctém století v podstatě jediný) plně pochopil Descartovu analytickou metodu, byl první, kdo v plném rozsahu využíval i záporné souřadnice. Části křivek v kvadrantech se zápornými souřadnicemi považoval za rovnocené s částmi v kvadrantu, kde jsou obě souřadnice kladné, což se dnes jeví jako samozřejmost, ale na konci 17. století to představovalo významné abstraktní rozšíření. Pomocí analytické geometrie systematicky vytvořil teorii novou – teorii kubických

[78] *The most remarkable fact is that the great importance of the discoveries of these two geometers was not fully appreciated for fifty years.* Viz [Coo40, str. 128].

[79] Jako první fungovala po dobu asi deseti let druhé poloviny 17. století *Accademie Cimento* ve Florencii; v roce 1660 byla založena v Londýně *Royal Society*, ale předcházelo jí již dvanáct let tajných schůzek v Oxfordu; v roce 1666 byla v Paříži založena *Académie des Science* (svou činnost zahájila až v roce 1699), opět předcházely soukromé schůzky, kterých se účastnil také Descartes, Mersenne, E. Pascal, B. Pascal, Roberval a další.

[80] Stejného mínění byl i Leibniz.

křivek.
Newtonova nejdůležitější geometrická práce byla jeho klasifikace kubických křivek. Ta je pozoruhodná v několika ohledech. Před jeho dobou věnovali autoři velkou pozornost přímkám, kružnicím a kuželosečkám, jen stručně se zmiňovali o jednotlivých křivkách, ať už algebraických nebo transcendentních; Newton se pustil do klasifikace celé jedné definované kategorie. To, že mu nevadily záporné hodnoty souřadnic, mu přišlo vhod, a jeho algebraické dovednosti a představivost byly vynikající. [Coo40, str. 129]

Ještě jeden zásadní pokrok v teorii křivek přinesl Newton. Tím je určení tečny ke křivce. Zjistil, že sklon tečny jako záporná hodnota poměru dvou parciálních derivací tohoto polynomu, položeného rovno nule, dává rovnici křivky. Také se věnuje otázkám křivosti, délkám oblouků a plochám, ale to nechám nyní stranou, neboť to patří spíše do infinitezimálního počtu než do geometrie. [Coo40, str. 131]

Newton také jako první aplikoval na studium křivek nekonečné řady. Svými pracemi ukázal nejen jak zkoumat v té době známé křivky, ale současně také jak popisovat křivky nové, přičemž formálně a v obecném rozsahu (ve srovnání s „pravítkovými nástroji“ Descarta) zcela abstraktně. Studium křivek se ve vymezeném stoletém období rozrůstá expanzivní rychlostí. Vybrané příklady ukazují (viz sekce 4.2), že mnohých výsledků bylo dosaženo současně nebo téměř současně více učenci. Právě na studiu křivek bylo možné ověřovat metody vznikajícího infinitezimálního počtu a prohlubovat metody analytické geometrie. Nutno však říci, že v 17. století není ještě odlišen v analytickém zkoumání geometrických útvarů čistě algebraický a čistě diferenciální přístup a že obě metody se často prolínají.

Newtonovy práce byly většinou stručné a mnohdy bez důkazů, proto podněcovaly jeho současníky i následovníky k podrobnému komentování a dokazování uvedených tvrzení. Při této práci vznikaly (nejen) v teorii křivek nové výsledky (Stirling, Clairaut a další – viz sekce 4.4). Z nich vyzdvihněme knihu Clairauta z roku 1731 *Recherches sur les courbes à double courbure*, ve které položil základ třem disciplínám – analytické geometrii v prostoru, diferenciální geometrii a deskriptivní geometrii založené na zobrazení prostoru pomocí ortogonálních projekcí do dvou k sobě kolmých rovin.

Lze říci, že v polovině 18. století vrcholí období, kdy se vyšetřují speciální křivky a jejich vlastnosti, a to všemi dostupnými metodami. Ve srovnání s Descartovou *Géométrií* dochází k zobecnění v tom smyslu,

že se vyšetřují stále častěji celé skupiny křivek určitého typu nikoliv jen jedna konkrétní křivka. Navíc křivky jsou vyšetřovány v celém svém rozsahu nikoliv jen v omezené části. Viděli jsme, že Descartes sice opustil pohled na křivku jako konečný segment ve čtverci, kruhu apod., jak ji chápali ve starověku (srovnej tabulka 2.4), ale ani Descartes při vyšetřování křivek ještě plně nevyužíval všechny kvadranty. Další možnosti ve vyšetřování křivek přináší diferenciální počet. Rozvíjející se matematická analýza stále více začíná pracovat s pojmem funkce, který je v dalším období s pojmem křivka nerozlučně spjat. Nejdůležitější body posunu ve vyšetřování křivek jsou uvedeny v tabulce 4.1.

V kapitole 4 jsme se věnovali stoletému období od vydání prvního latinského překladu Descartovy *Géométrie* v roce 1649 až do roku 1748, kdy vychází Eulerův spis *Introductio in Analysin Infinitorum*. Eulerovu práci už přiřazujeme k období systematického výkladu teorie křivek v úzké spojitosti s pojmem funkce, kterým se budeme zabývat až v kapitole 5. V následujícím století se díky nashromážděným poznatkům o křivkách přesune pozornost od vyšetřování mnoha konkrétních vlastností jednotlivých křivek ke snaze zodpovědět některé obecné otázky, vyšetřovat vlastnosti společné celým skupinám křivek, vymezit a definovat nové pojmy. Tím bude i zřetelně vytlačena na povrch otázka: „Co to vlastně je křivka?“, která se zatím stále jen nezřetelně rýsuje za studiem objektů, jež intuitivně za křivky považujeme.

- Vyšetřují se stále častěji celé skupiny křivek určitého typu nikoliv jen jedna konkrétní křivka.
- Křivky jsou vyšetřovány v celém svém rozsahu nikoliv jen v omezené části (např. ve čtverci, v prvním kvadrantu apod.).
- K vyšetřování křivek se používají nové metody, zejména diferenciální počet.

Tabulka 4.1: Zobecnění ve vyšetřování křivek v letech 1649–1748.

Literatura

[Ada08] Adam–Tanery. *Oeuvres de Descartes*, svazek I–X. Léopold Cerf, Paris, 1897–1908.

[Byd48] Bydžovský, B. *Úvod do algebraické geometrie*. Praha, 1948.

[Coo40] Coolidge, J. L. *A History of Geometrical Methods*. Oxford, 1940.

[Des37] Descartes, R. *The geometry of Rene Descartes*. Leiden, 1637. (z francouzštiny a latiny přeložil do angličtiny David Eugene Smith a Marcia L. Latham, Chicago 1925; přetisk: Dover Publications, New York, 1954).

[Fuc87] Fuchs, E. a kol. *Světonázorové problémy matematiky IV*. SPN, Praha, 1987.

[Fuc99] Fuchs, E.–Bečvář, J., ed. *Matematika v 16. a 17. století*, svazek 12 v *Dějiny matematiky*. Prometheus, Praha, 1999.

[Gra94] Grattan–Guinness, I., ed. *Companion Encyklopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. Routledge, London, 1994.

[Juš70] Juškevič, A. P. *Istorija matěmatiki – matěmatika VII stoletija*, svazek II. Nauka SSSR, Moskva, 1970.

[Juš72] Juškevič, A. P. *Istorija matěmatiki – matěmatika VIII stoletija*, svazek III. Nauka SSSR, Moskva, 1972.

[Kat98] Katz, V. J. *A history of mathematics: an introduction*. Addison-Wesley Educational Publishers, Inc., 2. vydání, 1998.

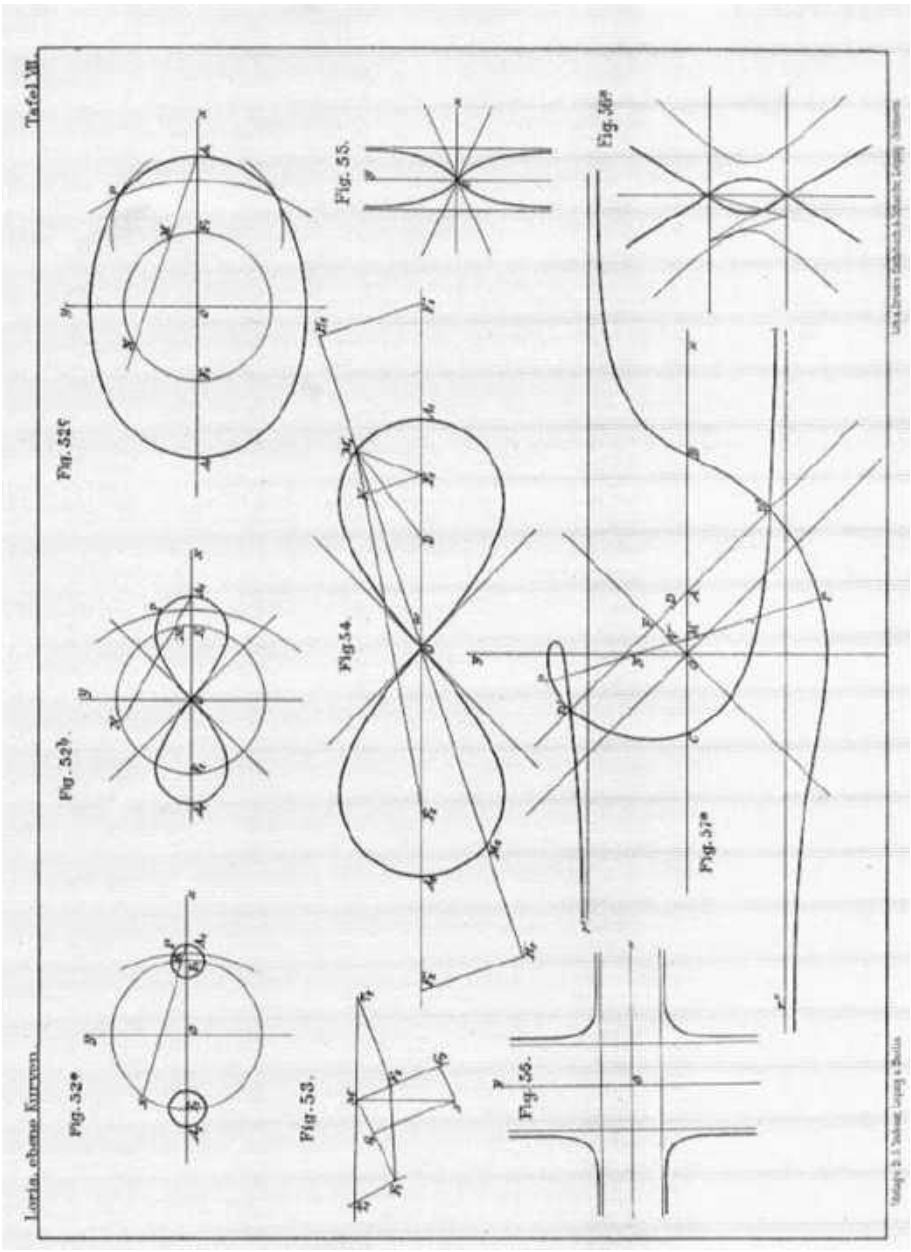
[Lor10] Loria, G. *Spezielle algebraische and transzendente ebene Kurven*, svazek I. (Die algebraischen Kurven). Druck und Verlag von B. G. Teubner, 2. vydání, 1910.

[Lor11] Loria, G. *Spezielle algebraische and transzendente ebene Kurven*, svazek II. (Die transcendenten und die Abgeleiteten Kurven). Druck und Verlag von B. G. Teubner, 2. vydání, 1911.

[New60] Newton, I. *An Enumeration of Lines of The Third Order*. London, 1860.

[New99] Newton, I. *The Principia. Mathematical Principles of Natural Philosophy*. University of California Press, London, 1999. (překlad I. Bernard Cohen a Anne Whitman).

[Sch00] Schwabik, Š. Bernard Bolzano a základy matematické analýzy. V *IX. seminář o filozofických otázkách matematiky a fyziky*, str. 63–85. Prometheus, Velké Meziříčí, 2000.



Obrázek 5.1: Ukázka z německého vydání spisu G. Lorii [Lor10]

Kapitola 5

Pojem křivka a pojem funkce

> *Čára je geometrický pojem, jehož přesná a dostatečně obecná definice je dosti obtížná a udává se v různých oblastech geometrie různým způsobem.*
>
> Š. Schwabik [Sch00, str. 70]

Pokud hovoříme o rovinné křivce, bezprostředně si představíme tenkou čáru, která může být různě kroucená, popř. jednou či vícekrát protíná sebe sama. Ukázali jsme, že do poloviny 19. století již bylo takovýchto objektů popsáno a ve většině případů i co do vlastností detailně studováno velké množství. V roce 1895 akademie věd v Madridu[1] vyhlásila matematikům výzvu k sepsání katalogu křivek, které byly studovány a zasloužily speciální název. Tato výzva byla akademií v Madridu vyhlášena poprvé už v roce 1892 s termínem do 31. 12. 1894, ale protože se nikdo nepřihlásil, akademie v roce 1895 tuto výzvu opakovala s termínem do 31. 12. 1897. Na druhou výzvu akademie odpověděli čtyři lidé – Portugalec Francisco Gomes Teixeira,[2] Ital Gino Loria,[3] španělský architekt Joaquín Vargas Y Aguirre a Francouz Henri Brocard.[4] Na cenu byly podány tři práce:

- F. G. Teixeira: *Tratado de las curvas Especiales Notables (Traktát o speciálních pozoruhodných křivkách)*, 1905, Madrid; spis byl pře-

[1] *Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Madrid.*
[2] Francisco Gomes Teixeira (1851–1933).
[3] Gino Loria (1862–1954).
[4] Pierre René Jean Baptiste Henri Brocard (1845–1922).

ložen do francouštiny a vydán v letech 1908, 1909 a 1915 pod názvem *Traité des Courbes Spéciales Remarquables, Planes et Gauches* v Coimbře, značně se rozšířil.[5]

- G. Loria: *Las curvas Planas Particulares Algébricas y Transcendentes (Speciální algebraické a transcendentní rovinné křivky)*, rukopis 1897; vyšlo v italštině a němčině.[6]

- J. V. Y Aguirre:
Catalogo General de Curvas (Katalog obecných křivek); pouze ve španělštině.

Henri Brocard předložil spis *Vocabulaire des Courbes Géométriques et Notes Bibliographiques (Slovník geometrických křivek a bibliografické poznámky)*, ale jeho práce byla napsána francouzsky a nebyla na cenu doporučena.[7] Nakonec obdrželi cenu akademie F. G. Teixeira a G. Loria. Jen pro představu uvádíme, že Loriovo dvoudílné vydání má celkem 872 stran a je zde vyobrazeno 205 křivek (viz ukázka na obr. 5.1).

V souvislosti se snahami utřídit známé křivky přirozeně vzniká otázka, jak je obecně matematicky definovat. Stěžejní podnět k hledání obecné definice křivky v tomto období dává matematická analýza, neboť pojem křivka se vyvíjel v úzké souvislosti s pojmem funkce. Podnětům matematické analýzy k vývoji pojmu křivka se věnujeme v sekci 5.1. V kapitole čtvrté jsme ukázali, že aplikace algebry na geometrii přinesla obrovský kvalitativní skok ve vyšetřování křivek. Další neméně významný kvalitativní skok přináší diferenciální geometrie jako aplikace matematické analýzy na geometrii. Diferenciální geometrií křivek, jejíž prvopočátky byly naznačeny již v sekci 4.5 předchozí kapitoly, se zabýváme v sekci 5.2. Nejprve rozebíráme Eulerovy spisy, které jsou vyvrcholením prehistorického období diferenciální geometrie (odstavec 5.2.1), potom srovnáváme diferenciálně geometrický přístup ke křivkám v pracích Mongeho a Gausse, jež jsou obecně považovány za počátek systematického výkladu diferenciální geometrie (odstavec 5.2.2), a v posledním odstavci 5.2.3 zmiňujeme některé významné výsledky jejich následovníků. V souvislosti s pokrokem algebraických metod v projektivní geometrii se v první polovině 19. století vydělila z analytické geometrie jako samostatný celek

[5] Reedice Chelsea Publishing Co., New York, 1971 a Jacques Gabay, Paris, 1995.

[6] Německá dvousvazková edice *Spezielle algebraische und transcendente ebene Curven*, která byla vydána poprvé v roce 1902 a podruhé v letech 1910–12, viz [Lor10], [Lor11], byla u nás v první polovině 20. století dobře známá.

[7] Ačkoliv akademie věd v Madridu jmenovala na základě této práce Brocarda svým korespondenčním členem.

teorie algebraických křivek vyššího stupně. Tento jev je historiky matematiky většinou považován za vznik algebraické geometrie jako samostatné vědní disciplíny.[8] Algebraickému pohledu na křivky se věnujeme v sekci 5.3.

V sekcích 5.2, 5.3 sledujeme vývoj teorie křivek přibližně do poloviny 19. století, kdy v pojetí křivky nastává výrazná změna definicí variety u B. Riemanna. Přínosu B. Riemanna se věnujeme samostatně v sekci 5.4. Na závěr této kapitoly uvádíme krátké pojednání o pojetí křivky u B. Bolzana, což je z historického hlediska velmi zajímavé, ale na další vývoj teorie křivek neměly Bolzanovy práce žádný vliv (viz sekce 5.5).

5.1. Funkce a podněty matematické analýzy

> *Nikdo neumí vysvětlit, co to je funkce.*
> *Ale: „Funkce f je dána, jestliže je každému reálnému číslu a přiřazeno nějakým určitým předepsaným způsobem číslo b* [...]*“.* Weyl v roce 1927.
>
> [Juš76b, str. 82]

Pojem funkce pravděpodobně poprvé použil Leibniz v roce 1673 v rukopise *Methodus tangentium inversa, seu du functionibus (Inverzní metoda tečen nebo–li o funkcích)*.[9] Pojetí funkce se ještě u samotného Leibnize postupně vyvíjí. V první fázi je funkce chápána zcela geometricky, pojem funkce je pevně spojen s křivkou a její tečnou v daném bodě. Funkcemi Leibniz nazývá úseky na osách objevující se při konstrukci tečny a dalších přímek příslušných danému bodu (normála, chorda apod.); řeší i úlohu opačnou: jak najít ordinály bodů křivky, jestliže pro danou křivku a tečný bod splňují nějakou funkci. Zatímco v prvním případě jsou pro něj funkcemi křivky průměty a úseky na osách jakožto objekty, v druhém případě rozumí funkcí jisté geometrické pravidlo.

Poprvé Leibniz publikoval své původní pojetí funkce jako obecného termínu pro různé lineární elementy pevně spojené s křivkou v *Acta Eruditorum* v roce 1692. V letech 1692–94 se pojem funkce objevuje také v korespondenci mezi bratry Johannem a Jacobem Bernoulliovými a Leibnizem. Jacob Bernoulli používá v roce 1694 v *Acta Eruditorum* také termín *Functionslinie (funkční čára)*, čímž míní křivku.[10] Jak jsme

[8] Viz např. [Fuc96b, str. 88].

[9] Viz [Juš70, str. 144]. Tento rukopis některé historické práce opomíjejí, např. [Can01, str. 5] uvádí rok 1692.

[10] Viz [Can01, str. 242].

ukázali v předchozí kapitole, kladl se postupně stále větší důraz na rovnice křivek a pozornost matematiků se přesouvala od křivek jako geometrických objektů na symboly v těchto rovnicích. Proměnná veličina začala být chápána jako hodnota závislá na ostatních konstantách a proměnných v rovnici a nikoliv na křivce samotné. Tento posun se odráží i v korespondenci mezi Leibnizem a Joh. Bernoullim. Postupně pojem funkce ztrácí svůj striktně geometrický charakter a klade se větší důraz na souvislost s rovnicí než s obrázkem – Joh. Bernoulli píše o *funkci proměnné* místo o *funkci křivky*. Kromě toho Leibniz považuje Descartovy názvy užité v klasifikaci křivek za nevyhovující a rozděluje v roce 1684 křivky na algebraické a transcendentní. Motivem odklonu od Descartovy terminologie byla skutečnost, že i mechanické křivky začaly být studovány v geometrii.[11]

Pod pojmem funkce se stále častěji rozumí analytický výraz. Toto pojetí bylo vlastní i Newtonovi. Poprvé formuluje definici pojmu funkce Joh. Bernoulli v roce 1718.

Funkcí proměnné veličiny se nazývá veličina sestavená libovolným způsobem z této proměnné veličiny a konstant.[12] [Ber42, str. 241, II]

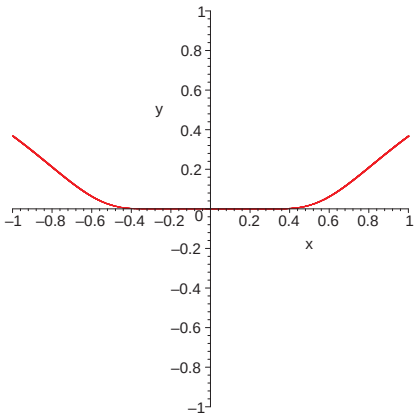
V polovině osmnáctého století byl pojem chápán jako analytický výraz reprezentovaný mocninnou řadou a v tomto smyslu je zformulována definice v knize Eulera *Introductio in Analysin Infinitorum* z roku 1748 (viz odstavec 5.2.1). Hned na počátku 19. století se pojem funkce stal centrálním objektem zkoumání matematické analýzy. Matematická analýza se formovala jako teorie o manipulování s funkcemi a rozvíjel se soubor prostředků pro vyšetřování vlastností funkcí nebo pro jejich vyhledávání (určování funkcí s danými vlastnostmi). Tím, jak vlastně jednotliví matematici v té době chápali pojem funkce, se zabývá řada pracích z historie matematiky.[13] Jisté je, že vžitá představa funkce dané jedním a týmž analytickým výrazem všude tam, kde ji lze vyšetřovat, již byla nereálná. Přesto se ještě v devatenáctém století s tímto pojetím ztotožňovala řada matematiků. Např. Lagrange na pojetí funkce jako mocninné řady budoval celou analýzu.[14] Postupně se ale začíná ukazovat, že toto pojetí nestačí. Jednak jsou známy křivky, které nejde popsat

[11] Viz [Juš70, str. 104].

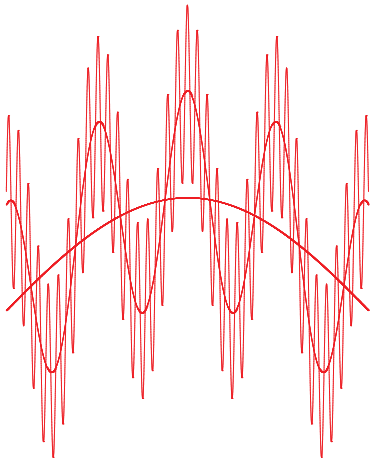
[12] *On apelle ici fonction d'une grandeur variable, une grantité composée de quelque manère que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.*

[13] U nás se tomuto tématu věnoval v několika článcích Š. Schwabik – viz např. [Sch00] nebo [Fuc96a, str. 7–17].

[14] Joseph-Louis Lagrange (1736–1813).



Obrázek 5.2: Příklad funkce, která není analytická



Obrázek 5.3: První tři členy řady spojitých funkcí pomocí nichž je definovaná Weierstrassova spojitá funkce, která nemá nikde derivaci.

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{pro } t \neq 0 \\ 0 & \text{pro } t = 0, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

analytickým výrazem (viz obr. 5.2), jednak se takové neanalytické výrazy objevují v souvislosti s některými fyzikálními jevy.[15]

Pojem souvislosti na přelomu 18. a 19. století souvisel spíš s představou spojitosti grafu a veškeré funkce, které se vyšetřovaly, byly v nejhorším případě po částech hladké a s nejvýše konečným počtem bodů nespojitosti v každém konečném intervalu. Představu o tom, že funkce, které lze vyšetřovat, musí být spojité, narušil Fourier v roce 1822.[16] Další představa vžitá na počátku 19. století, která měla být brzy „rozbita“, s pojmem křivka také bezprostředně souvisí. Předpokládalo se, že spojitá funkce, kterou si mnozí představovali jako geometrický objekt namalovaný rukou bez zvednutí tužky z papíru, musí mít derivaci všude až na několik izolovaných bodů. Do povědomí matematiků se nesprávnost tohoto tvrzení dostala plně až po roce 1872, kdy o takovém protipříkladu referoval K. Weierstrass[17] v berlínské akademii. Weierstrassův příklad

[15] Např. při vyšetřování kmitů se objevují výrazy typu $\alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \cdots$. Viz [Beč01, str. 7].

[16] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), *Théorie analytique de la chaleur (Analytická teorie tepla)*, 1822.

[17] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897).

spojité funkce, která nemá derivaci v žádném bodě publikoval P. du Bois Reymond v roce 1895.[18] Jde o funkci definovanou předpisem

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a^i \cos(b^i \pi x), \tag{5.1}$$

kde $b > 1$ je liché číslo, $0 < a < 1$ a platí $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ (viz obr. 5.3). Podobných příkladů bylo následně sestrojeno více.[19] Jak uvidíme v kapitole šesté, tyto poznatky matematické analýzy se staly stěžejními podněty k tomu, že se na křivku přestalo pohlížet jako na graf funkce.

Na závěr poznamenejme, že v roce 1922 byl v rukopisech B. Bolzana[20] objeven příklad spojité funkce, která dle něj neměla derivaci v „husté množině". V. Jarník následně ukázal, že funkce, která je v rukopise uvedena, nemá derivaci nikde.[21] Vzhledem k tomu, že rukopis byl dokončen roku 1834, Bolzano tím předběhl vývoj světové matematiky o několik desetiletí, ale práce nikdy nevyšla, takže tím vývoj matematiky nebyl nijak ovlivněn. Dalším Bolzanovým myšlenkám, které se bezprostředně týkají křivek, se věnujeme v sekci 5.5.

5.2. Diferenciální geometrie křivek do roku 1854

5.2.1. Leonhard Euler

V knize L. Eulera[22] *Introductio in Analysin Infinitorum* z roku 1748 je poprvé k pojmu funkce přistupováno jako k ústřednímu pojmu matematické analýzy. Euler uvádí, že

funkce proměnné veličiny je analytický výraz sestavený jakýmkoliv způsobem z této proměnné veličiny a čísel nebo konstantních veličin. [Bečo1, str. 8]

[18] P. du Bois Reymond: *Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeler Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 79, 1875, str. 21–37.

[19] Např. Jean Gaston Darboux (1842–1917) sestrojil takovou funkci danou předpisem

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} = \frac{\sin((n+1)! \cdot x)}{n!}.$$

[20] Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781–1848).

[21] V. Jarník, *O funkci Bolzanově*, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, 51 (1922), str. 248–264. Přehledná konstrukce Bolzanovy funkce včetně dalších zajímavých komentářů viz [Sch00, str. 75-76].

[22] Leonhard Euler (1707–1783).

Ukázali jsme, že podobnou definici udal již Joh. Bernoulli (viz str. 174), ale zásluhou Eulera a jeho knihy, která dlouho udávala tón matematické analýze, se dostala tato definice do obecného povědomí.

Druhý díl Eulerova spisu *Introductio in Analysin Infinitorum* (viz obr. 5.4) je geometrický a je věnován především rovinným křivkám jakožto analytickým funkcím jedné proměnné, ale když Euler *Introductio* psal, věděl už, že se vyskytují i funkce neanalytické.[23] Hned na začátku tohoto geometrického dílu rozděluje funkce na spojité (*continuae*) a nespojité nebo-li smíšené (*discontinuae, mixtae*), ale tato terminologie má jiný význam než dnes. Spojitou křivkou nebo funkcí Euler nazývá tu, která je ve svém definičním oboru dána jedním analytickým výrazem a nespojitou tu, která je dána dvěma nebo více výrazy. Např. dvě větve hyperboly $y = \frac{1}{x}$ jsou v tomto smyslu spojitou křivkou, jak sám Euler uvádí, kdežto graf funkce

$$y = \begin{cases} -x & \text{pro } x < 0 \\ x & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$$

je funkcí nespojitou.

Druhý díl Eulerova *Introductio* je originálním výkladem použití analytické geometrie a sloužil jako výchozí pro pozdější učebnice.

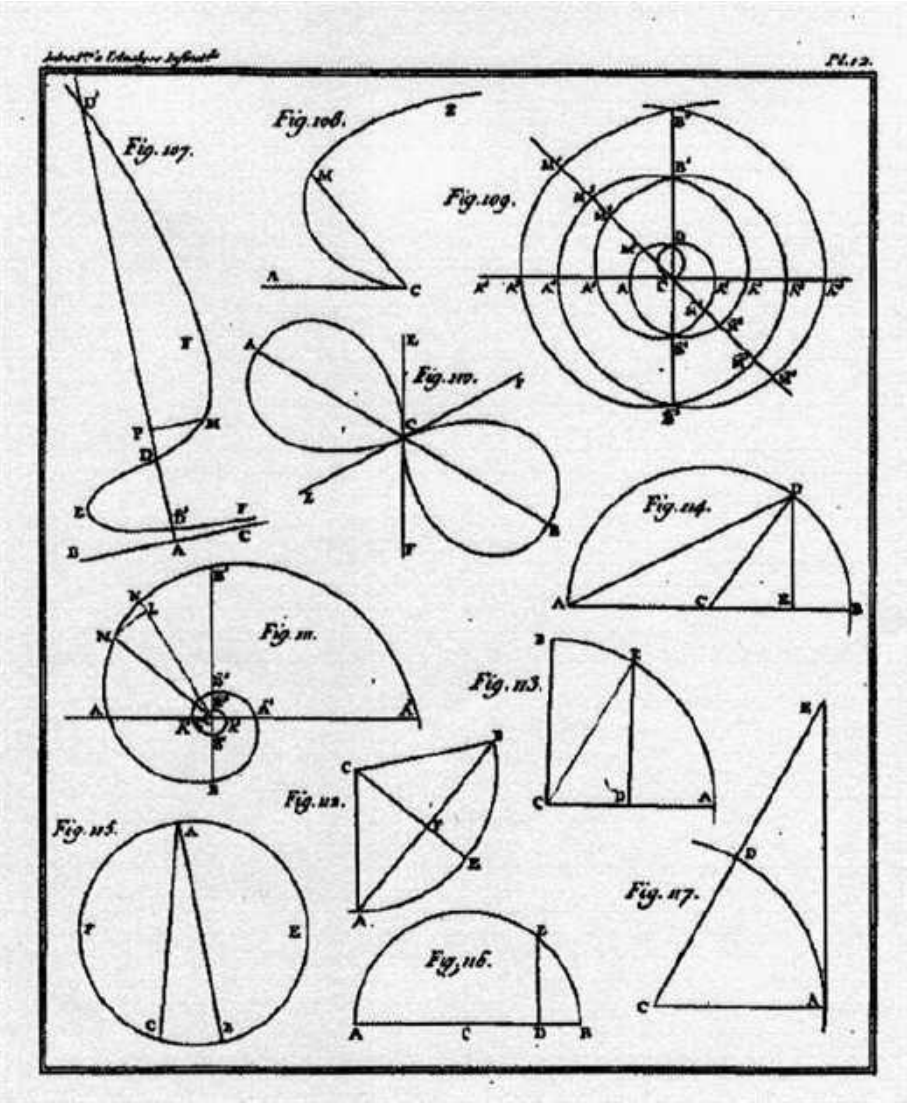
Na rozdíl od Newtona, který dával přednost syntetickým metodám geometrie starověkých [učenců], Euler se snaží řešit všechny geometrické otázky s použitím algebry a analýzy. [Juš72, str. 163]

V první části druhého dílu definuje pravoúhlé a kosoúhlé souřadnice a křivky, v druhé části Euler uvažuje transformace těchto souřadnic, v části třetí uvádí rozdělení algebraických křivek podle stupně, ve čtvrté studuje jejich vlastnosti – počet průsečíků s přímkou, počet bodů, kterými je křivka určena apod. V páté a šesté části poprvé Euler vyšetřuje v širším slova smyslu křivky druhého stupně dané rovnicí

$$y^2 + \frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta} y + \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0, \tag{5.2}$$

ale používá i metody geometrické. Nejdříve vyšetřuje vlastnosti těchto křivek a potom rovnici (5.2) s použitím transformace souřadnic redukuje na kanonický tvar. Zkoumá speciální vlastnosti elipsy, paraboly a hyperboly, přičemž je zajímavé, že parabolu uvažuje jako nekonečně protáhlou elipsu. Teorie křivek druhého stupně se týká i odstavec šesté

[23] Viz [Juš72, str. 251].



Obrázek 5.4: Ukázka ze spisu L. Eulera *Introductio in Analysin Infinitorum*, 1748

části, v němž je uvedeno ryze analytické řešení úlohy o nalezení křivky procházející pěti danými body. V sedmé části je uvedena nová metoda rozdělení křivek třetího stupně do tří skupin založená na vyšetřování nekonečných větví s použitím diskriminantu a vyšetřování nekonečných větví se věnuje i část osmá. Na rozdíl od anglických matematiků nepoužívá Euler Newtonův rovnoběžník, ale tzv. „řád nekonečnosti“, což není nic jiného než stupeň neznámé veličiny ve jmenovateli (viz poznámka 50 na str. 152). Křivkám třetího stupně je věnována i část devátá a desátá, kde je uvedena klasifikace těchto křivek do 16 skupin, kanonické rovnice a srovnání s klasifikací Newtona.

Část jedenáctá obsahuje klasifikaci křivek čtvrtého stupně. Euler uvádí rozdělení do 146 skupin, ale ve skutečnosti je těchto skupin jen 125. Některé jeho nepřesnosti v klasifikaci opravil J. Plücker – viz odstavec 5.3.1. Euler hledá také rovnice tečen ke křivkám v jednoduchých i násobných bodech. Ve dvanácté části přechází ke zkoumání tvaru křivek v konečné části roviny. Nemá k dispozici obecnou metodu, a proto uvažuje jen některé křivky třetího stupně a následně ukazuje, že jeho závěry lze zobecnit pro křivky dané rovnicí

$$Q(x)y^2 + 2P(x)y + R(x) = 0,$$

kde $P(x),\ Q(x),\ R(x)$ jsou mnohočleny. Je zde podána stručná charakteristika n–násobných bodů a na závěr této části je zkoumána křivka na obrázku 5.5(a) o rovnici

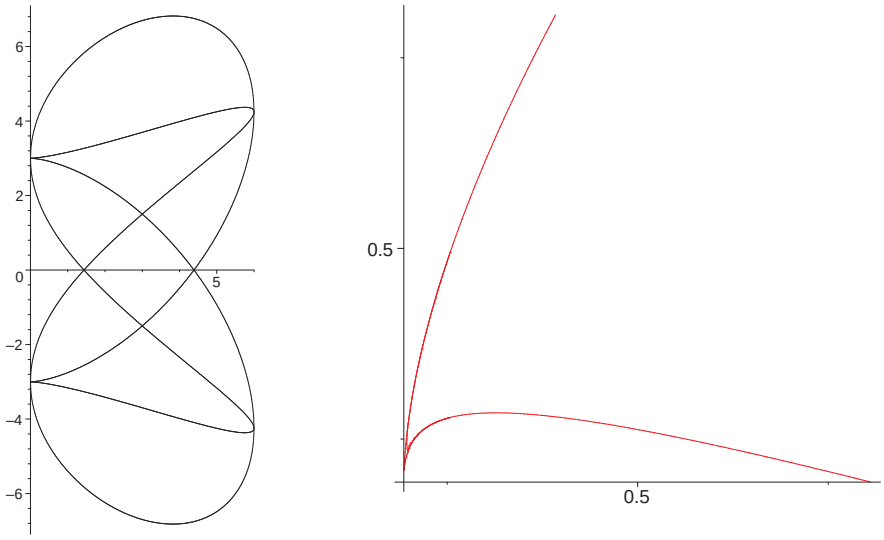
$$2y = \pm\sqrt{6x - x^2} \pm \sqrt{6x + x^2} \pm \sqrt{36 - x^2}.$$

V třinácté a čtrnácté části jsou zkoumány algebraické vlastnosti křivek v okolí regulárních i singulárních bodů – v části třinácté v souvislosti s určením tečny a v části čtrnácté v souvislosti s oskulační kružnicí, jejíž poloměr je poloměrem křivosti v daném bodě. Je zde uvedena také klasifikace singulárních bodů. V hlavní části textu Euler nejdříve opakuje chybu de Malvese (viz str. 159) a neuvažuje, že u algebraických křivek mohou existovat i body vratu druhého druhu, avšak brzo poté, co rukopis odeslal, zjistil, že tuto singularitu má např. křivka na obrázku 5.5(b) o rovnici

$$y^4 - 2y^2x - 4yx^2 - x^3 + x^2 = 0.$$

Euler odeslal opravu a nakladatelem byla vytištěna na konci odpovídajícího odstavce.[24] Zajímavá je část patnáctá pojednávající o křivkách

[24]Této otázce je věnován i Eulerův článek *Sur le point de rebroussement de la seconde espèce de M. le Marquis de l'Hospital (O bodu vratu druhého druhu markýze l'Hospitala)*, Mém. Ac. Berlin, 1751 (1749).



(a) (b)

Obrázek 5.5: Některé křivky, kterými se zabýval L. Euler

majících jeden nebo více „průměrů“, kde Euler pod pojmem *ortogonální průměr křivky* rozumí přímku, která půlí všechny kolmé chordy, tj. osu křivky. Cílem této části je nalézt podmínky, při kterých má křivka jednu nebo více os symetrie, ale ve skutečnosti zde Euler formuluje obecnější úlohu: Najít podmínky, za kterých může být křivka „podobná nebo rovná sama sobě“. Tím ve skutečnosti klasifikuje pohyby v rovině, tj. rovinné transformace, a ukazuje, kterými z nich může křivka přejít sama v sebe (tzv. shodné transformace). V části šestnácté jsou uvedeny rovnice křivek splňující předem dané geometrické vlastnosti, ale většinou jsou zde jen zobecněné vlastnosti kuželoseček (např. se hledají křivky, pro něž suma třetích, čtvrtých a pátých mocnin vzdáleností od dvou daných bodů je konstantní). Podobné otázky jsou řešeny v sedmnácté části v polárních souřadnicích. V části osmnácté Euler navazuje na studium shodností v rovině a zkoumá na křivkách podobná zobrazení a afinní transformace (*affinitas*). V devatenácté části pojednává o průsečících algebraických křivek a v části dvacáté o jejich využití pro konstrukční řešení algebraických rovnic, ale tato část je mnohem méně rozsáhlá než u Descarta nebo Newtona.

V části dvacáté první se pojednává o některých transcendentních křivkách: logaritmické křivce, goniometrických křivkách, spirále, cyk-

loidě, epicykloidě, hypocykloidě a křivce o rovnici

$$x^y = y^x.$$

Část dvacátá druhá je věnována řešení transcendentních rovnic, které obsahují goniometrické funkce.

Svůj dodatek k *Introductio in Analysin Infinitorum* věnoval Euler analytické geometrii v prostoru, jsou zde obsaženy počátky teorie kvadratických ploch. Stejně jako Clairaut užívá jednoduché rovinné souřadnice, místo třetí bere kolmou vzdálenost bodu od roviny. V poznámce uvádí, že by bylo možno užít i tří souřadnic a v pozdějších spisech už je také užívá.

Ve své práci z roku 1767 *Recherches sur la courbure des surfaces (Pojednání o křivých plochách)* na začátku poznamenává, že dosud bylo možné vyjádřit křivost jen pro sféru a zavádí pro obecnou plochu normálový řez, čímž rozumí řez plochy rovinou, která obsahuje normálu. Pro normálové řezy, tj. křivky na ploše, bylo možné vyšetřovat jejich křivosti. Euler zjistil, že mezi normálovými řezy jsou takové, jejichž křivosti jsou maximální, resp. minimální, jejich křivosti označil f, resp. g. Bylo možné dokázat, že tyto dva normálové řezy, které Euler nazývá hlavní (*principal*) řezy, jsou vzájemně kolmé. Jako důsledek určil poloměr křivosti obecného normálového řezu

$$r = \frac{2fg}{f + g - (f - g)\cos\phi}, \tag{5.3}$$

kde ϕ je úhel mezi normálovým řezem a jedním z hlavních řezů.

V roce 1776 Meusnier[25] přidal dodatek k Eulerově formuli, když uvažoval i šikmý řez: pro rovinu σ, která protíná plochu v křivce o poloměru křivosti r_σ a normály plochy pod úhlem α, Meusnier našel vztah

$$r_\sigma = r \cdot \cos\alpha.$$

V roce 1813 Ch. Dupin[26] převedl Eulerovu formuli (5.3) do elegantnějšího tvaru

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos^2\phi}{f} + \frac{\sin^2\phi}{g}. \tag{5.4}$$

Eulerovo dílo je vyvrcholením prehistorického období diferenciální geometrie před vznikem systematického výkladu. Geometrické metody se zde objevují ještě daleko více než v příručkách 19. a 20. století.

[25] Jean Battiste Meusnier (1754–1793).
[26] Pierre Charles François Dupin (1784–1873).

V roce 1750, záhy po Eulerově *Introductio in Analysin Infinitorum*, vychází spis G. Cramera[27] *Introduction à l'analyse des lignes courbes (Úvod do analýzy křivek)*, ve kterém shrnul a doplnil znalosti o počtu určujících prvků křivky, o singulárních bodech a násobnosti průsečíků křivek tak dalece, že závažnějších výsledků v teorii algebraických křivek se v 18. století v podstatě už nedosáhlo.

5.2.2. Gaspard Monge a Carl Friedrich Gauss

G. Monge[28] shrnul své vlastní výsledky spolu s dalšími té doby do první učebnice diferenciální geometrie *Application de l'analyse à la géométrie (Aplikace analýzy na geometrii)*, kterou lze považovat za první systematické dílo zabývající se diferenciální geometrií. Práce je specifická tím, že

vznikala v podstatě více než třicet let a kostru tvořily vysokoškolské přednášky. Tomu musel podléhat i celkový způsob výkladu látky. Monge je věrný způsobu výkladu postupujícímu od známého k neznámému obdobnému jeho výkladu deskriptivní geometrie. [Šmí69, str. 5]

Monge zveřejňoval své práce z diferenciální geometrie během svého působení na vojenské škole od roku 1771. Postupně se jeho úvahy objevovaly i v přednáškách a v roce 1801 byly poprvé vydány pod názvem *Feuilles d'analyse appliqué à la géometrie (Listy aplikace analýzy na geometrii)*. Pozdější vydání z let 1804 a 1809 bylo značně rozšířeno a neslo již název *Application de l'analyse à la géométrie*. Po Mongeově smrti knihu ještě v roce 1828 doplnil dodatkem Liouville.[29]

Z řady dřívějších článků, které pak byly do knihy zahrnuty, je vzhledem k našemu tématu zajímavý memoár, který předložil Monge pařížské akademii v roce 1771. V tomto spise, který následně vytvořil poslední kapitolu *Application de l'analyse à la géométrie*, vyšetřuje křivost prostorových křivek. Byla to vůbec první Mongeova práce z difererenciální geometrie. Zabývá se poloměrem křivosti prostorových křivek. Monge ukazuje, že analogií středu křivosti rovinných křivek je osa křivosti křivek prostorových, nazývá ji polární přímkou. Dokazuje, že plocha, kterou polární přímky tvoří, je rozvinutelná a že daná prostorová křivka

[27] Gabriel Cramer (1704–1752).

[28] Gaspard Monge (1746–1818).

[29] Joseph Liouville (1809–1882). Někteří autoři uvádějí jako datum vydání Mongeovy knihy s Liouvillovým dodatkem až rok 1850. Vzhledem k tomu, že dodatek obsahuje překlad Gaussovy knihy z roku 1828 věnované teorii ploch, zdá se tato možnost pravděpodobnější.

má nekonečně mnoho evolut, které na této ploše leží. U rovinných křivek splývá evoluta s množinou středů křivosti křivky. Množina středů křivosti prostorové křivky leží na ploše polár, ale neshoduje se s evolutou prostorové křivky. Kromě evolut se poslední část spisu věnuje také studiu jednoduchých a dvojných bodů.

S Gaussovou[30] *Disquisitiones generales circa superficies curvas (....)* z roku 1828 začíná nová epocha.

Gauss bývá někdy nazýván otcem diferenciální geometrie. Byl první, kdo uvedl ideu invariantu. [Gra94, str. 334]

Gauss ve své knize vytvořil důmyslnou a hlubokou teorii ploch bez použití tensorového či vektorového počtu, pomocí kterých se dnešní klasická diferenciální geometrie vykládá. Byl prvním, kdo definoval plochu v $\mathbb{E}^3$ prostřednictvím prostého spojitého zobrazení po částech otevřené množiny v $\mathbb{R}^2$. Do té doby byla plocha chápána jako hranice pevného tělesa.

Rozhodl se, že bude uvažovat jen plochy nebo jejich části se „spojitou křivostí“, tedy takové, pro které v každém bodě existuje tečná rovina. Sféru jako plochu s konstantní křivostí použil podobně jako kružnici v rovině – definoval křivost plochy v okolí daného bodu srovnáváním s křivostí tohoto bodu v jeho okolí na korespondující kulové ploše. Vzorec pro míru křivosti vyjadřuje – viz (5.6), že míra křivosti se rovná součinu křivostí hlavních normálových řezů. Normálový řez je křivka na ploše, proto se Gauss začal zabývat vlastnostmi křivek na ploše, které plochu charakterizují. Tím dal základ úvahám o vnitřní geometrii plochy jako jisté analogii geometrie v rovině.

Analogii přímky v rovině tvoří nejkratší spojnice dvou bodů na ploše. Gauss nalezl její rovnici. Hlavní normála prostorové křivky, která je nejkratší spojnicí dvou bodů na ploše, se shoduje s normálou plochy. Tuto vlastnost poprvé objevil Euler prostřednictvím úvah o prostorových křivkách, ale Gauss ji odvodil tak, že se vyhnul úvahám, které by vyžadovaly zavádět pojmy z teorie prostorových křivek.

Tak se Gauss dostává ke geodetickým křivkám,[31] na nichž vždy nejkratší spojnice dvou bodů leží. Dokazuje některé věty o nejkratších spoj-

[30] Carl Friedrich Gauss (1777–1855).

[31] Počátky hlubšího studia geodetických křivek pocházejí z přelomu 17. a 18. století a jsou spojeny se jmény Jac. a Joh. Bernoulliových. Rovnici geodetické čáry publikoval Joh. Bernoulli až v roce 1742, ale znal ji již roku 1728, kdy ji uvedl v jednom ze svých dopisů (viz [Fuc99, str. 150]). V práci z roku 1728 *De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta jungente (O nejkratší křivce na libovolné ploše spojující dva dané body)* Euler použil tři vzájemně kolmé souřadnice a ukázal, že plochu lze vyjádřit rovnicí se třemi proměnnými, křivku pak dvěma takovými rovnicemi a uvedl rovnice třech typů ploch – válcových, kuželových a rotačních.

nicích a konstruuje geodetické polární a rovnoběžné souřadnice. Ukazuje, že rovnici nejkratší spojnice lze odvodit i pomocí první diferenciální formy. Potom její element vyjádříme ve tvaru, který je dobře znám z diferenciální geometrie i dnes

$$\mathrm{d}s = \sqrt{E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p\mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2}. \tag{5.5}$$

Ukázal, že míru křivosti plochy v daném bodě P lze vyjádřit pomocí křivosti dvou extrémních normálových řezů na této ploše bodem P, tzv. hlavních řezů. Dnes toto vyjádření nazýváme Gaussova (úplná) křivost plochy:

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2, \tag{5.6}$$

kde $\kappa_1,\ \kappa_2$ jsou křivosti křivek hlavních řezů. Dále Gauss dokázal tvrzení, které je známé jako *theorema egregium* (znamenitá věta):

Věta 5.1. Křivost K je invariantní vůči otáčení a ohýbání plochy.

Myšlenky o invariantech přinesly další výsledky do teorie křivek. Nejdůležitější vzorce jsou dnes známé jako Frenet–Serretovy formule a dávají vztah mezi vektorovým trojhranem tvořeným vektory tečny ($\vec{t}$), normály ($\vec{n}$) a binormály ($\vec{b}$) a obloukem křivky s:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} = \kappa\vec{n}, \tag{F–S 1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s} = -\kappa\vec{t} + \tau\vec{b}, \tag{F–S 2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}s} = -\tau\vec{n}, \tag{F–S 3}$$

kde $\kappa(s)$ je křivost a $\tau(s)$ torze křivky.

Rovnice (F–S 1) a (F–S 2) se objevily v roce 1826 v Cauchyho[32] *Lecons sur l'application du calcul infinitésimal à la géométrie (Lekce z aplikací infinitesimálního počtu na geometrii)*. Práce byla vydána na základě jeho přednášek na Polytechnice. Estónský matematik Karl Eduard Senff v roce 1831 jako první odvodil všechny tři vzorce.[33] Frenet[34]je prezentuje ve svých tezích v roce 1847, ale bez toho, že by si byl vědom důležitosti jejich významu. Jejich základní význam podtrhl teprve Serret[35] v roce 1851.

[32] Augustin Louis Cauchy (1789–1857) patří k těm, kdo pozvedli diferenciální geometrii na počátku 19. století.

[33] Viz [Gra94, str. 335].

[34] Fréderic Jean Frenet (1816–1868).

[35] Josef Alfred Serret (1819–1885).

Vzhledem k našemu tématu je třeba připomenout, že dosud převládalo v diferenciální geometrii studium křivek rovinných. Prostorovými křivkami se zabýval pouze Clairaut. Monge na něho navázal a vyřešil všechny složitější otázky, které Clairaut nevyřešil.

Historikové matematiky se neshodují v tom, zda považovat za začátek systematického výkladu diferenciální geometrie práci Mongeovu: *Application de l'analyse à la géométrie* nebo Gaussovu: *Disquisitiones generales circa superficies curvas* a není naším cílem to rozhodnout,[36] ale bezesporu lze říci, že Monge

byl zakladatelem francouzské školy diferenciální geometrie: Meusnier a Dupin, například, byli jeho žáci. V tradici pokračovali další a trvá dodnes; současná terminologie je z velké části francouzského původu. [Gra94, str. 333]

O Gaussovi se již v roce 1877 píše:

Přejde-li později k studiu vyšší geometrie, zejména k vyšetřování ploch, o nichž Euler a Monge si tolikerých zásluh získali, a porovná-li pak tyto metody s těmi, podle nichž se vyšetřuje křivost rovinných útvarů geometrických, zarazí se zajisté nad nestejnými zásadami, jimiž se tu mathematikové řídí, přeje-li si pak míti důslednou a analogickou methodu, najde ji opět jen u Gausse, kterýž vůbec v důsledném provádění nejhlavnějších úloh byl nepřekonatelným mistrem. [Stu77, str. 27]

S těmito slovy můžeme jen souhlasit. Z dnešního hlediska navíc zdůrazněme, že

když Gauss vyjádřil míru křivosti jako součin křivostí hlavních normálových řezů, poznal, že k určení míry křivosti stačí zkoumat křivky na ploše. Tak nachází analogii přímky v rovině – nejkratší spojnici dvou bodů. Tento pojem dále rozvinul. [Ště64, str. 29]

Gauss tím zobecnil geometrii v rovině a částečně vytvořil vnitřní geometrii plochy. Jeho práce dala především nový směr diferenciálně geometrickému zkoumání ploch.

[36] Podrobná studie této otázky viz [Smí69].

5.2.3. Následovníci Monge a Gausse

Mongeovi žáci vytvořili tzv. francouzskou geometrickou školu.[37] Zmiňme z nich Ch. Dupina, který už v roce 1813 publikoval spis *Développments de géométrie (Rozvoj geometrie)*. Práce obsahuje mnoho příspěvků zejména k diferenciální geometrii ploch, ale také pasáže týkající se křivek – např. o asymptotických přímkách apod. Jeho dalším přínosem k rozvoji diferenciální geometrie je objev tzv. *Dupinovy indikatrix*, která umožní nahradit lokálně průběh plochy rovnicí obsahující jen členy druhého stupně.

Na výsledky Gausse přímo navázal K. Peterson,[38] který v roce 1853 objevil závislost koeficientů 1. a 2. kvadratické formy. Nezávisle na něm přišel na vztah mezi těmito koeficienty i Mainardi[39] v roce 1857 a v roce 1868 Codazzi,[40] odtud termín *Peterson–Mainardi–Codazziho rovnice.* Jelikož první rovnici znal už Gauss, užívá se někdy i termín *Gauss–Mainardi–Codazziho rovnice.* Navíc výsledky Petersona nebyly ve své době ve světě dobře známy, protože jako učitel matematiky nepracoval na univerzitě. Ale následně ovlivnily Egorova[41] a jakmile Darboux[42] a Bianchi[43] jeho výsledky použili ve své práci, stal se světově známým. Do té doby, než byly Petersonovi nejdůležitější práce z let 1866–1867 přeloženy,[44] mnohé jeho výsledky zobecnil Darboux.

Tím se ovšem dostáváme už daleko za rámec vytyčeného tématu.

[37] Mezi přímé Mongeovi žáky, kteří rozvíjeli francouzskou geometrickou školu patří: Jean Hachette (1769–1834), Barnabé Brisson (1777–1828), Charles Julien Brianchon (1783–1864), Jean Victor Poncelet (1788–1867), Théodore Olivier (1793–1853), Charles Dupin, Lambert Adolphe Jacques Quetelet (1796–1874), Germinal Pierre Dandelin (1794–1847) a další – viz např. [Fol82, str. 53].

[38] Karl Michajlovič Peterson (1828–1881).

[39] Gaspare Mainardi (1800–1879).

[40] Delfino Codazzi (1824–1873).

[41] Dimitri Fedorovič Egorov (1869–1931).

[42] Jean Gaston Darboux (1842–1917).

[43] Luigi Bianchi (1856–1928).

[44] Byly publikovány v Toulouse teprve v roce 1905.

5.3. Rozvoj algebraické geometrie křivek

> *Geometrie, ve svém širším významu, je věda, jejímž cílem je vyšetřování vlastností obrazců. Obrazec je vzájemný vztah ohraničených prostorů mezi sebou. To je tedy vlastnost křivek a ploch; křivky jsou hranice povrchů a plochy hranice těles.*
>
> Lardner v roce 1831, [Lar31, str. xi]

Výraznější pokrok směrem k osamostatnění algebraické geometrie nebyl možný bez upevnění logických základů vhodného prostoru pro algebraicko-geometrické objekty a tím je projektivní prostor. I když základy některých partií projektivní geometrie položil Desargues (viz str. 100), jeho myšlenky nezaznamenaly větší ohlas a mnohé bylo v 19. století znovuobjevováno. Některé pojmy a věty projektivní geometrie byly uvedeny v pracích Mongeova žáka L. Carnota,[45] ale za tvůrce prvního uceleného systému projektivní geometrie lze považovat až J. V. Ponceleta. Ve spise z roku 1822 *Traité des propriétés projectives des figures (Traktát o projektivních vlastnostech útvarů)* položil základy projektivní geometrie budované syntetickou metodou. Použití algebry si vyžádalo až zavedení imaginárních prvků. K dalšímu rozvoji tohoto směru přispěl také Brianchon,[46] který v roce 1806 zformuloval duální větu k větě Pascalově.[47] Brianchon dospěl v práci z roku 1817 *Mémoire sur les lignes du* 2^{d} *ordre (Memoár o čarách 2. řádu)* téměř až k definici duality – stěžejního pojmu projektivní geometrie, ale nakonec tento pojem zavádí Poncelet. O vypracování algebraických metod projektivní geometrie se zasloužili zejména A. G. Möbius,[48] J. Plücker[49] a A. Cayley.[50] Přímku v trojrozměrném projektivním prostoru určenou body $A = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ a $B = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ dodnes vyjadřujeme pomocí tzv. Plückerových souřadnic

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}; \quad i, j = 0, 1, 2, 3; \quad i \neq j, \tag{5.7}$$

[45] Lazare Nicolas Marguérite Carnot (1753–1823); *De la corrélation des figures en géométrie (O korelaci útvarů v geometrii)*, 1801; *Géométrie de position (Geometrie polohy)*, 1803.

[46] Charles Julien Brianchon (1785–1864).

[47] Brianchonova věta: Spojnice průsečíků stran šestiúhelníka kuželosečce opsaného procházejí jedním bodem. Pascalova věta viz str. 101.

[48] Augustus Ferdinand Möbius (1790–1868).

[49] Julius Plücker (1801–1868).

[50] Arthur Cayley (1821–1895).

které jsou vzájemně svázané vztahem

$$p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{21} = 0. \tag{5.8}$$

Současně se intenzivně rozvíjí i metody syntetické projektivní geometrie v pracích J. Steinera[51] a M. Chaslese.[52] Chasles v pracích *Traité de géométrie superieure (Traktát o vyšší geometrii)* z roku 1852 a *Traité des sections coniques (Traktát o kuželosečkách)* z roku 1865 rozvíjí výstavbu projektivní geometrie lineárních útvarů, kuželoseček a kvadratických ploch na základě elementárních útvarů, projektivních transformací a dvojpoměru.

V souvislosti s pokrokem algebraických metod v projektivní geometrii se v první polovině 19. století vydělila z analytické geometrie jako samostatný celek teorie algebraických křivek vyššího stupně. Tento jev je historiky matematiky většinou považován za vznik algebraické geometrie jako samostatné vědní disciplíny.[53] Základním prostorem pro studium algebraických křivek se stala projektivní rovina, v homogenních projektivních souřadnicích se pevně ustálilo používání nevlastních a imaginárních prvků.

5.3.1. Julius Plücker

Algebraický základ některých základních pojmů projektivní geometrie (homogenní souřadnice, nevlastní a imaginární prvky, dualita apod.) vytvořil Plücker už v dvoudílné knize *Analytisch-geometrische Entwicklungen (Analyticko-geometrické výzkumy)* I, II, 1828-31. V práci z roku 1835 *System der analytischen Geometrie (Systém analytické geometrie)* opravil mnoho Eulerových nepřesností v klasifikaci křivek 4. stupně. Sám se však dopustil některých nových omylů. Významným přínosem bylo úplné vyjasnění počtu inflexních bodů kubické křivky a stanovení všech typů singularit křivek 4. stupně. V práci z roku 1839 *Theorie der algebraischen Curven (Teorie algebraických křivek)* Plücker zkoumá důležité invarianty rovinné algebraické křivky:

n – *stupeň* – maximální možný počet průsečíků křivky s přímkou,

m – *třída* – maximální možný počet tečen křivky jdoucích jedním bodem,

u – počet uzlových bodů křivky,

[51] Jacob Steiner (1796–1863).
[52] Michel Chasles (1793–1880).
[53] Viz např. [Fuc96b, str. 88].

v – počet bodů vratu křivky,

i – počet inflexních bodů křivky,

t – počet dvojnásobných tečen křivky.

Využil své algebraické metody projektivní geometrie na stanovení vztahů mezi těmito číselnými invarianty, které jsou dnes nazývány Plückerovy vzorce – vztahy (5.9), (5.10) a duální Plückerovy vzorce – vztahy (5.11), (5.12):

Tvrzení. Pro křivku stupně n, která kromě u uzlových bodů a v bodů vratu nemá jiné singularity, platí:

$$m = n(n-1) - 2u - 3v \tag{5.9}$$
$$i = 3n(n-2) - 6u - 8v \tag{5.10}$$
$$n = m(m-1) - 2t - 3i \tag{5.11}$$
$$v = 3m(m-2) - 6t - 8i. \tag{5.12}$$

Použitím duality Plücker ukázal, že pro přímky projektivní roviny je možné zavést přímkové souřadnice (u_0, u_1, u_2), pomocí nichž všechny tečny křivky

$$f(x_0, x_1, x_2) = 0$$

lze vyjádřit jistou rovnicí $\varphi(u_0, u_1, u_2) = 0$. Přičemž křivky

$$C_f : \ f(x_0, x_1, x_2) = 0,$$
$$C_\varphi : \ \varphi(u_0, u_1, u_2) = 0$$

jsou navzájem duální a jejich body, tečny i číselné invarianty bijektivně korespondují.

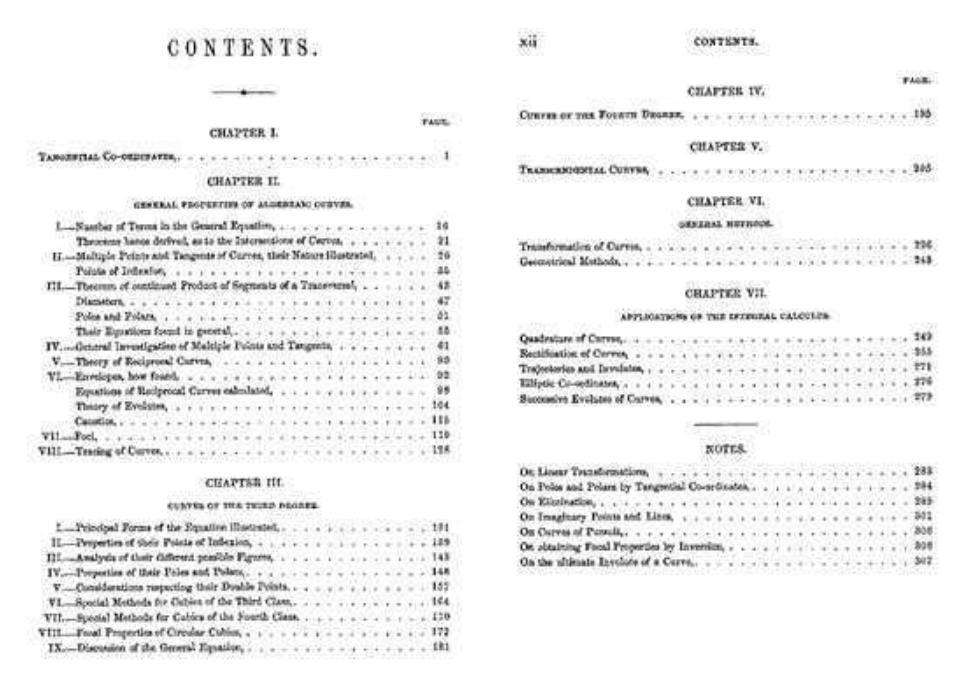
K rozvoji teorie algebraických křivek přispěl také L. Hesse.[54] Ke křivce o rovnici $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ studoval příslušnou křivku stupně $3n(n-2)$ zadanou rovnicí

$$\| \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j} \| = 0, \tag{5.13}$$

která se ukázala jako důležitá při zkoumání inflexních bodů a dostala po něm název ***Hesseho křivka***.

Algebraickou teorii křivek završil Salmon[55] pracemi *Treatese on the higher plane curves (Traktát o vyšších rovinných křivkách)* z roku 1852 a

[54] Lugwig Otto Hesse (1811–1874).
[55] George Salmon (1819–1904).



CONTENTS.

PAGE.

CHAPTER I.

Tangential Co-ordinates, ... 1

CHAPTER II.

GENERAL PROPERTIES OF ALGEBRAIC CURVES.

I.—Number of Terms in the General Equation, ... 16
Theorems hence derived, as to the Intersections of Curves, ... 21
II.—Multiple Points and Tangents of Curves, their Nature illustrated, ... 26
Points of Inflexion, ... 35
III.—Theorem of continued Product of Segments of a Transversal, ... 43
Diameters, ... 47
Poles and Polars, ... 51
Their Equations found in general, ... 58
IV.—General Investigation of Multiple Points and Tangents, ... 61
V.—Theory of Reciprocal Curves, ... 80
VI.—Envelopes, how found, ... 92
Equations of Reciprocal Curves calculated, ... 98
Theory of Evolutes, ... 104
Caustics, ... 115
VII.—Foci, ... 119
VIII.—Tracing of Curves, ... 128

CHAPTER III.

CURVES OF THE THIRD DEGREE.

I.—Principal Forms of the Equation illustrated, ... 131
II.—Properties of their Points of Inflexion, ... 139
III.—Analysis of their different possible Figures, ... 143
IV.—Properties of their Poles and Polars, ... 148
V.—Considerations respecting their Double Points, ... 157
VI.—Special Methods for Cubics of the Third Class, ... 164
VII.—Special Methods for Cubics of the Fourth Class, ... 170
VIII.—Focal Properties of Circular Cubics, ... 172
IX.—Discussion of the General Equation, ... 181

xii CONTENTS.

PAGE.

CHAPTER IV.

Curves of the Fourth Degree, ... 195

CHAPTER V.

Transcendental Curves, ... 205

CHAPTER VI.

GENERAL METHODS.

Transformation of Curves, ... 226
Geometrical Methods, ... 243

CHAPTER VII.

APPLICATIONS OF THE INTEGRAL CALCULUS.

Quadrature of Curves, ... 249
Rectification of Curves, ... 255
Trajectories and Involutes, ... 271
Elliptic Co-ordinates, ... 276
Successive Evolutes of Curves, ... 279

NOTES.

On Linear Transformations, ... 283
On Poles and Polars by Tangential Co-ordinates, ... 294
On Elimination, ... 295
On Imaginary Points and Lines, ... 301
On Curves of Pursuit, ... 306
On obtaining Focal Properties by Inversion, ... 308
On the ultimate Involute of a Curve, ... 307

Tabulka 5.1: Obsah Salmonova spisu *A treatise on higher plane curves: Intended as a sequel to a treatise on conic sections* z roku 1852, viz [Sal25]

Modern higher algebra (Moderní vyšší algebra) z roku 1859. Tyto spisy jsou koncipovány jako učebnice[56] Představu o tom, co tehdy teorie křivek zahrnovla je možno si udělat podle obsahu Salmonova spisu – viz tabulka 5.1. Podrobná studie prací Salmona a jejich porovnání se spisem Lardnera *A Treatise on Algebraic Geometry*[57] i dalšími spisy z 19. století již zcela přesahuje možnosti této práce.[58]

[56] Salmon napsal v letech 1848–1862 čtyři spisy koncipované jako učebnice *A treatise on conic sections* (1848), *A treatise on higher plane curves: Intended as a sequel to a treatise on conic sections* (1852), *Lessons introductory to the modern higher algebra (1859)* a *A treatise on the analytic geometry of three dimensions* (1862).

[57] Viz [Lar31].

[58] Domníváme se, že si tato tematika zasluhuje samostatnou studii.

5.3.2. Biracionální transformace

Všechny lineární transformace mají společné některé vlastnosti: zachování incidence, invariantnost dvojpoměru čtyř bodů na přímce, invariantnost stupně algebraické křivky, invariantnost násobnosti bodů, resp. tečen algebraické křivky. Dnes bychom řekli, že to jsou všeobecné vlastnosti projektivní grupy. Nápadnou vlastností, kterou se liší nelineární geometrické transformace od lineárních, je všeobecně různost algebraické křivky a stupně jejího obrazu v transformaci. Příkladem takové transformace je kruhová inverze v rovině, zobrazující přímku na kružnici, kterou se zabýval už Apollónios (viz str. 50). Inverze se objevují i v matematice 17. století, avšak teprve ve století 19. přichází v souvislosti s rozvojem projektivní a neeukleidovské geometrie větší vlna zájmu o tato zobrazení. Zpočátku zůstává spíše u studia speciálních případů, ale studium algebraických křivek vede v šedesátých letech 19. století k zobecnění těchto metod. Impulsem byla snaha transformovat algebraické křivky v reálné (resp. i komplexní) projektivní rovině tak, aby se snížil „stupeň“ jejich singularity.

První krok v tomto směru učinil L. Cremona.[59] Nelineární algebraické transformace, které použil na transformaci křivek v práci *Sulle transformazioni geometriche delle figure piane (O geometrických transformacích rovinného útvaru)* z roku 1862, se staly základem pro budování teorie biracionálních transformací.[60] Postupně se staly objektem samostatného zkoumání a daly podnět k rozvoji ucelené oblasti algebraické geometrie. Největší zásluhy na jejím budování měli příslušníci italské školy algebraické geometrie a od roku 1870 škola německá, zejména M. Noeter,[61] E. Noeter[62] a B. L. Waerden.[63] Z Cremonovy italské školy algebraické geometrie jmenujme zejména F. Brioschiho[64] a E. Bettiho.[65]

[59] Antonio Luigi Gaudenzio Giuseppe Cremona (1830–1903).

[60] Na Cremonovu počest bývají někdy biracionální transformace nazývány Cremonovy.

[61] Max Noeter (1844–1921).

[62] Emmy Amalie Noeter (1882–1935).

[63] Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996).

[64] Francesco Brioschi (1824–1897).

[65] Škola, do níž jsou zahrnováni Corrado Segre (1863–1924), Giuseppe Veronese (1854–1917), Federigo Enriques (1871–1946), Guido Castelnuovo (1865–1952), Francesco Severi (1879–1961) a další rozpracovávala směr, který udali v Německu Clebsch a Noeter a který navazuje na výsledky anglických algebraických geometrů.

5.4. Bernard Riemann a pojem *varieta*

Zcela výjimečné postavení v budování základů n-rozměrné geometrie má Riemann.[66] Nevypracoval ani ucelenou teorii jako Grassmann[67] ani neposkytl nové metody jako třeba Plücker, ale koncepcí pojmu *varieta* zformuloval fundamentální myšlenku, ze které se v následujícím období vyvinula rozsáhlá matematická oblast – diferenciální geometrie na varietách. Základní ideje nové koncepce vyslovil ve své habilitační přednášce v roce 1854 *Über die Hypothesen, welchen der Geometrie zu Grunde liegen (O hypotézách ležících v základech geometrie)*.[68] Ukázky z přednášky jsou uvedeny v tabulce 5.2. Od prací Riemanna můžeme na historii algebraické geometrie pohlížet jako na dialog dvou přístupů, jeden zdůrazňující geometrii a druhý algebru.[69] Riemann používá pojem *varieta* v jeho intuitivním smyslu. V originále je použito slovo *Mannigfaltigkeit*, jehož doslovný překlad je *rozmanitost*. Dnes se pod pojmem *Mannigfaltigkeit* rozumí již onen technický smysl, který se ustálil až v první polovině 20. století a jemuž v české geometrické terminologii odpovídá pojem *varieta*. V naivním významu, ve kterém pojem *Mannigfaltigkeit* používá i F. Klein[70] by mu snad nejlépe odpovídal výraz *vícerozměrné množství*.[71]

Ideu n-rozměrné variety zavádí Riemann induktivně, začíná s varietou jednodimenzionální, tedy s křivkou

jejíž základní charakteristika je, že z libovolného jejího bodu je možno jít spojitým pohybem jen dvěma směry, vpřed a vzad. [Kat98, str. 780]

Dvoudimenzionální varietu konstruuje tak, že každá jednodimenzionální podvarieta může spojitě přejít do jiné jednodimenzionální podvariety.

Riemannovy myšlenky byly velmi aktivně rozvíjeny F. Kleinem, který některé z nich vložil do svých vlastních výsledků.

[66] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866).
[67] Hermann Günter Grassmann (1809–1877).
[68] Viz [Rie19], poprvé publikováno 1868. Toto téma habilitační práce mu zadal Gauss. Když Riemannovu habilitační přednášku krátce před svou smrtí vyslechl, vysoce jeho hluboké myšlenky hodnotil.
[69] Viz [Gra94, str. 920].
[70] Felix Klein (1849–1925).
[71] Viz [Fuc96a, str. 84].



— 6 —

Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen.

Plan der Untersuchung.

Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als die ersten Grundbegriffe für die Konstruktionen im Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie gibt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten. Das Verhältnis dieser Voraussetzungen bleibt dabei im Dunkeln; man sieht weder ein, ob und inwieweit ihre Verbindung notwendig, noch a priori, ob sie möglich ist.

Diese Dunkelheit wurde auch von Euklid bis auf Legendre, um den berühmtesten neueren Bearbeiter der Geometrie zu nennen, weder von den Mathematikern noch von den Philosophen, welche sich damit beschäftigten, gehoben. Es hatte dies seinen Grund wohl darin, daß der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Größen, unter welchem die Raumgrößen enthalten sind, ganz unbearbeitet blieb. Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Größe aus allgemeinen Größenbegriffen zu konstruieren. Es wird daraus hervorgehen, daß eine mehrfach ausgedehnte Größe verschiedener Maßverhältnisse fähig ist und der Raum also nur einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Größe bildet. Hiervon aber ist eine notwendige Folge, daß die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Größenbegriffen ableiten lassen, sondern daß keiten gehen bei Änderung der Funktion stetig ineinander über; man wird daher annehmen können, daß aus einer von ihnen die übrigen hervorgehen, und es wird dies, allgemein zu reden, so geschehen können, daß jeder Punkt in einen bestimmten Punkt der andern übergeht; die Ausnahmefälle, deren Untersuchung wichtig ist, können hier unberücksichtigt bleiben. Hierdurch wird die Ortsbestimmung in der gegebenen Mannigfaltigkeit zurückgeführt auf eine Größenbestimmung und auf eine Ortsbestimmung in einer minderfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit. Es ist nun leicht zu zeigen, daß diese Mannigfaltigkeit $n-1$ Dimensionen hat, wenn die gegebene Mannigfaltigkeit eine n-fach ausgedehnte ist. Durch n-malige Wiederholung dieses Verfahrens wird daher die Ortsbestimmung in einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit auf n Größenbestimmungen, und also die Ortsbestimmung in einer gegebenen Mannigfaltigkeit, wenn dieses möglich ist, auf eine endliche Anzahl von Quantitätsbestimmungen zurückgeführt. Es gibt indes auch Mannigfaltigkeiten, in welchen die Ortsbestimmung nicht eine endliche Zahl, sondern entweder eine unendliche Reihe oder eine stetige Mannigfaltigkeit von Größenbestimmungen erfordert. Solche Mannigfaltigkeiten bilden z. B. die möglichen Bestimmungen einer Funktion für ein gegebenes Gebiet, die möglichen Gestalten einer räumlichen Figur usw.

II. Maßverhältnisse, deren eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen fähig ist, unter der Voraussetzung, daß die Linien unabhängig von der Lage eine Länge besitzen, also jede Linie durch jede meßbar ist.

Es folgt nun, nachdem der Begriff einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit konstruiert und als wesentliches Kennzeichen derselben gefunden worden ist, daß sich die

— 7 —

Ortsbestimmung in derselben auf n Größenbestimmungen zurückführen läßt, als zweite der oben gestellten Aufgaben eine Untersuchung über die Maßverhältnisse, deren eine solche Mannigfaltigkeit fähig ist, und über die Bedingungen, welche zur Bestimmung dieser Maßverhältnisse hinreichen. Diese Maßverhältnisse lassen sich nur in abstrakten Größenbegriffen untersuchen und im Zusammenhange nur durch Formeln darstellen; unter gewissen Voraussetzungen kann man sie indes in Verhältnisse zerlegen, welche einzeln genommen einer geometrischen Darstellung fähig sind, und hierdurch wird es möglich, die Resultate der Rechnung geometrisch auszudrücken. Es wird daher, um festen Boden zu gewinnen, zwar eine abstrakte Untersuchung in Formeln nicht zu vermeiden sein, die Resultate derselben aber werden sich im geometrischen Gewande darstellen lassen. Zu beidem sind die Grundlagen enthalten in der berühmten Abhandlung des Herrn Geheimen Hofrats Gauß über die krummen Flächen.

1.

Maßbestimmungen erfordern eine Unabhängigkeit der Größen vom Ort, die in mehr als einer Weise stattfinden kann; die zunächst sich darbietende Annahme, welche ich hier verfolgen will, ist wohl die, daß die Länge der Linien unabhängig von der Lage sei, also jede Linie durch jede meßbar sei. Wird die Ortsbestimmung auf Größenbestimmungen zurückgeführt, also die Lage eines Punktes in der gegebenen n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit durch n veränderliche Größen x_1, x_2, x_3 und so fort bis x_n ausgedrückt, so wird die Bestimmung einer Linie darauf hinauskommen, daß die Größen x als Funktionen Einer Veränderlichen gegeben werden. Die Aufgabe ist dann, für die Länge der Linien einen mathematischen Ausdruck aufzustellen, zu welchem Zwecke die Größen x als in Einheiten ausdrückbar betrachtet werden

Tabulka 5.2: Ukázka z Riemannovy přednášky *Über die Hypothesen, welchen der Geometrie zu Grunde liegen* s překladem vybraných odstavců

O hypotézách, které leží v základech geometrie

Jak dobře víme, geometrie předpokládá jako dané obojí: koncept prostoru a základní principy pro konstrukce v prostoru. To dává jen jmenné definice těchto věcí, zatímco jejich hlavní specifikace se objevují ve formě axiomů. Vztah mezi těmito předpoklady leží v temnotě, není vidět jestli nebo do jaké míry nějaký vztah mezi nimi je nutný, nebo prioritně zda nějaký vztah mezi nimi je možný. [. . .]

II. Vztahy míry, jež jsou možné na varietě dimenze n za předpokladu, že délky úseček jsou nezávislé na jejich poloze, což má za následek to, že každá úsečka může být měřena libovolnou jinou úsečkou.

Když jsme vytvořili pojem variety dimenze n a zjistili, že jejich pravá povaha spočívá ve vlastnosti toho, že určení polohy v ní může být redukováno na n určení velikosti, dostáváme se ke druhému z výše uvedených problémů, studiu vztahů míry, jichž je variety schopna a podmínek, které postačují k jejich určení. Určení míry vyžadují, aby veličiny byly nezávislé na poloze, což se může stát několika způsoby. Hypotéza, která se představí jako první a kterou zde rozvinu, je taková, že délka úseček je nezávislá na jejich poloze a v důsledku toho je každá úsečka měřitelná pomocí libovolné jiné úsečky. Tím se ukotvení polohy redukuje na ukotvení veličiny a polohu bodu n-dimenzionální variety lze v důsledku toho vyjádřit pomocí n proměnných $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, a pak určení úsečky spočívá ve vyjádření těchto veličin jako funkcí jedné proměnné. Úloha pak spočívá ve stanovení matematického výrazu pro délku úsečky, a pro tento účel musíme uvažovat veličiny x vyjádřitelné v jistých jednotkách. Budu se tomuto problému věnovat s jistými omezeními a budu se především věnovat úsečkách, pro něž se poměry přírůstků dx příslušných proměnných souvisle mění. Můžeme pak uvažovat tyto úsečky rozdělené do jednotlivých prvků, v rámci nichž lze poměr veličin dx považovat za konstantní; a problém je tak redukován na určení, pro každý bod, obecného vyjádření pro lineární prvek ds začínající v tomto bodě, vyjádření, které tak bude obsahovat veličiny x a veličiny dx. Budu předpokládat, z druhé, že délka lineárního prvku, po první řád, je nezměněna, pokud na všechny body tohoto prvku aplikujeme nekonečně malé posunutí, z čehož současně vyplývá, že zvětší-li se všechny veličiny dx v tom samém poměru, bude se lineární prvek měnit v tom samém poměru. Za těchto předpokladů může být lineárním prvkem libovolná homogenní funkce prvního řádu veličin dx, která zůstává nezměněna, když změníme znaménka všch dx, a v níž jsou libovolné konstanty spojitými funkcemi veličin x.

5.5. Pojem křivka u Bernarda Bolzana

Bernard Bolzano v práci o problémech výpočtu délky, plochy a objemu[72] z roku 1817 se mimo jiné pokusil definovat pojem čára (křivka):

Prostorový útvar, k jehož každému bodu, počínaje od jisté vzdálenosti pro všechny menší, existuje aspoň jeden a nejvýše konečná množina bodů coby sousedů, se nazývá linie. [Sch00, str. 71]

Co je míněno pojmem „soused“ Bolzano nespecifikuje, ale ze souvislosti plyne, že v případě bodu v prostoru má pro danou vzdálenost na mysli všechny body množiny, které jsou od tohoto bodu vzdáleny právě o tuto vzdálenost.[73] Prostorovým útvarem je zde nazýván libovolný konečný nebo nekonečný systém bodů.

Dále specifikuje, co rozumí pod pojmem souvislá čára, jednoduchá čára, uzavřená čára apod.

2. Prostorový útvar, jehož každá část, na kterou lze podle právě daného výkladu pohlížet jako na čáru, má se zbylou částí, na kterou pak rovněž musí být možno pohlížet jako na čáru, alespoň jeden společný bod se nazývá vesměs souvislou čarou.
3. Prostorový útvar, jehož každý bod má od jisté vzdálenosti počínaje pro všechny menší nejvýše dva sousedy, se nazývá jednoduchá čára.
4. Prostorový útvar, jehož každý bod má od jisté vzdálenosti počínaje pro všechny menší sudý počet sousedů, a přitom nemá body, jejichž vzdálenost od jiných je větší než jistá daná vzdálenost, se nazývá do sebe se navracející nebo uzavřená čára.
5. Je-li tento počet všude jenom dva, jde o jednoduchou do sebe se navracející čáru.
6. Čára, která obsahuje body, které počínaje od jisté vzdálenosti pro všechny menší mají jenom jednoho souseda, se nazývá ohraničená čára.
7. Tyto body se nazývají hraniční (nebo koncové) body, zbylé pak vnitřní body.
8. Mají-li tyto poslední body každý jen dva sousedy, nazývá se čára jednoduchou ohraničenou čarou. [Sch00, str. 71]

[72] *Die drei Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes, und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst, zugleich als Probe einer gänzlichen Umstaltung der Raumwissenschaft, allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt von Bernard Bolzano (Tři problémy výpočtu délky, plochy a objemu řešené bez použití nekonečně malého, bez předpokladů Archiméda a bez přísně neodůvodnitelných předpokladů, současně jako vzorek úplného přetvoření nauky o prostoru předloženo všem matematikům k prověření Bernardem Bolzanem)*, Lepzig, 1817.

[73] Viz [Sch00, str. 71].

S jistou rezervou lze říci, že zde podal zcela moderní definici křivky. V šesté kapitole se zabýváme tím, jak obtížné je podat dosti obecnou a současně dostatečně přesnou definici pojmu čára (křivka). K této Bolzanově pasáži se budeme vracet.

5.6. Tendence v geometrii v polovině 19. století

Nelze si nepovšimnout zvýšeného zájmu o geometrickou problematiku obecně v první polovině 19. století.[74] Toto oživení zájmu o geometrii způsobily zejména dva faktory (1) stále více se objevují tendence o zobecňování, které starší problematiku elementární geometrie postavily do nového světla; (2) objekty zkoumané analytickou metodou Descartovou se díky nové metodice obohatily o řadu nových objektů. Současně se začaly vytvářet nové oblasti geometrie jako zcela samostatné geometrické disciplíny, ale dlouhou dobu bez zpozorování užších vztahů k vedlejším disciplínám. G. Monge na samém konci 18. století svou první publikací *Geometrie Descriptive* (1795) položil základy deskriptivní geometrie. Pěstování této disciplíny v 19. století bylo bezpochyby nejen odpovědí na podněty z praxe (rozvíjející se průmysl), ale vynutilo si i vědecký pohled na tuto disciplínu. Studium některých situací v Mongeově deskriptivní geometrii vedlo Ponceleta k vytvoření systému projektivní geometrie v roce 1822,[75] ve které se paralelně syntetickými i analytickými metodami rozvíjí zkoumání nových geometrických objektů – křivek a ploch (i vyšších stupňů).

Analytické zaměření postupně oprošťuje geometrii od názornosti, která ji svým způsobem svazuje. Stále více se prosazuje algebraické chápání objektů. Naznačili jsme, že pokrok v teorii algebraických forem a v teorii funkcí n proměnných bezprostředně předcházel prvním pokusům formulovat základní pojmy n-rozměrné geometrie. Snaha o jejich geometrickou interpretaci byla jedním z hlavních stimulů, které k postupnému formování n-rozměrné geometrie vedly. Přínosem v této oblasti byly práce Jacobiho[76] a Cayleyho, které připravily pro geometrii algebraický aparát.

V roce 1844 podává Grassmann rozpracování n-rozměrné geometrie v knize *Die lineale Ausdehnungslehre (Teorie lineární extenze)*,[77] ale

[74] Podrobněji se této otázce věnuje např. J. Folta: *Vývoj geometrie v 19. století* [Fuc87, str. 31–44].

[75] J. V. Poncelet *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris 1822.

[76] Carl Gustav Jacobi (1804–1851).

[77] Nutno poznamenat, že myšlenka vektorového prostoru se objevila již u B. Bolzana v roce 1810, ale tehdejší matematiku ovlivnila až práce Grassmana.

k plnému pochopení jeho myšlenek došlo později.[78]

V 19. století vznikají významné teritoriální školy. Patří k nim zejména škola francouzských geometrů vyrůstající z odkazu G. Monge, J. V. Ponceleta, italská škola Cremonova a německá škola algebraické geometrie zahájená J. Plückerem. Podstatným krokem v přibližování algebraických základů n-rozměrné geometrie k dnes používané terminologii analytické n-rozměrné geometrie byly až práce C. Jordana a E. Bettiho po roce 1870.

Aplikace algebraických a infinitezimálních metod v geometrii přináší výrazný posun ve vlastní teorii křivek. Křivky byly dosud chápány a vyšetřovány většinou jako prostředky k řešení algebraických rovnic (viz str. 166) a nyní jsou vyšetřovány pro ně samotné. Důležitou partií algebraické povahy v Eulerově *Introductio in Analysin Infinitorum* je afinní klasifikace rovinných algebraických křivek 3. stupně do 16 typů a řešení otázek dotyku křivek, násobnosti bodů a inflexe (i když bez hlubší systematizace). U Gausse jsme navíc viděli, že křivky jako řezy na ploše se stávají nástrojem pro vyšetřování ploch a stávají se její nedílnou součástí. Systém hlavních křivek tvoří ortogonální síť na ploše a tím dává možnost vytvořit vnitřní geometrii plochy.

Zcela nový pohled na křivku přináší Riemann zavedením pojmu *Mannigfaltigkeit (rozmanitost)*, kterému dnes v české terminologii odpovídá pojem *varieta*. I když se později stává varieta fundamentálním pojmem diferenciální geometrie, v Riemannově pojetí jde spíše o vystižení topologicko-geometrických vlastností křivky. Počátky topologie historikové matematiky spojují až s pracemi Cantora,[79] ale byly to práce Riemanna, které se zasloužily o to, že topologie získala větší pozornost, protože Riemann přesně rozeznal, kde jsou myšlenky topologie potřebné, vytvořil nezbytné topologické metody a ihned je aplikoval do analýzy.[80] Otázkou navždy zůstane, kam by se posunul zrod některých topologických pojmů, včetně topologické definice křivky, kdyby Riemann předčasně nezemřel. Jeho nedokončená práce o topologii ukazuje, že Riemann

[78] *Unfortunately, Grassmann's work, like that Bolyai and Lobachevsky, was not appreciated until the end of century. At that time Giuseppe Peano gave a set of axioms for a finite-dimensional vector space to provide a basis for the study of higher dimensional geometry and Elie Cartan (1869–1951) applied Grassman's work to the study of differencial forms.* Viz [Kat98, str. 767].

[79] Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) v roce 1872 definoval některé základní pojmy teorie množin, jeho článek publikovaný v roce 1874 v *Crelle Journal* je považován za zrod vlastní teorie množin.

[80] Viz [Aul97, str. 360].

chtěl rozpracovat teorii homologií pro dimenzi n.[81]

Riemanovo vystižení křivky jako jednorozměrné variety v této podobě je zatím intuitivní, ale v kapitole 6 uvidíme, že Riemann přesně vystihl geometrickou podstatu toho, čím objekty, které chceme považovat za křivky, odlišit od jiných. Předběhl tím dobu o několik desítek let, pojem topologické variety se objevuje teprve na počátku 20. století.[82]

Všechny naznačené tendence v rozvoji geometrických disciplín vedly ke zobecňování a ke snaze definovat pojem geometrická čára nebo-li křivka. Moderní definici tohoto pojmu se věnujeme v kapitole šesté.

[81] Po Riemannově smrti teorii homologií rozpracoval jeho přítel E. Betti (1823–1892), který o Riemannově práci věděl. Viz [Aul97, str. 362].

[82] *This was the beginning of the theory of manifolds (in which topological manifolds were to appear only in our century).* Viz [Aul97, str. 362].

Literatura

[Aul97] Aull, C. E.–Lowen, R., ed. *Handbook of the History of General Topology*, svazek 1. Kluwer Academic Publishers, London, 1997.

[Beč01] Bečvář, J. a kol. *Matematika ve středověké Evropě*, svazek 19 v *Dějiny matematiky*. Prometheus, Praha, 2001.

[Ber42] Bernoulli, J. *Opera Omnia*. Lausannae–Genevae, 1742.

[Can01] Cantor, M. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, svazek III. Teubner, Leipzig, 1901.

[Fol82] Folta, J. *Česká geometrická škola - historická analýza*. Academia, Praha, 1982.

[Fuc87] Fuchs, E. a kol. *Světonázorové problémy matematiky IV*. SPN, Praha, 1987.

[Fuc96a] Fuchs, E.–Bečvář, J., ed. *Matematika v 19. století*, svazek 3 v *Dějiny matematiky*. Prometheus, Praha, 1996.

[Fuc96b] Fuchs, E.–Bečvář, J., ed. *Člověk – umění – matematika*, svazek 4 v *Dějiny matematiky*. Prometheus, Praha, 1996.

[Fuc99] Fuchs, E.–Bečvář, J., ed. *Matematika v 16. a 17. století*, svazek 12 v *Dějiny matematiky*. Prometheus, Praha, 1999.

[Gra94] Grattan–Guinness, I., ed. *Companion Encyklopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. Routledge, London, 1994.

[Juš70] Juškevič, A. P. *Istorija matěmatiki – matěmatika VII stoletija*, svazek II. Nauka SSSR, Moskva, 1970.

[Juš72] Juškevič, A. P. *Istorija matěmatiki – matěmatika VIII stoletija*, svazek III. Nauka SSSR, Moskva, 1972.

[Juš76b] Juškevič, A. P. The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Science*, 16, 37–85, 1976.

[Kat98] Katz, V. J. *A history of mathematics: an introduction*. Addison-Wesley Educational Publishers, Inc., 2. vydání, 1998.

[Lar31] Lardner, D. *A Treatise on Algebraic Geometry*, svazek II. Whittaker, Treacher, and Arnot, London, 1831.

[Rie19] Riemann, B. *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1919.

[Sal25] Salmon, G. *A treatise on the higher plane curves*. Hodges a Smith, Dublin, 1825.

[Sch00] Schwabik, Š. Bernard Bolzano a základy matematické analýzy. V *IX. seminář o filozofických otázkách matematiky a fyziky*, str. 63–85. Prometheus, Velké Meziříčí, 2000.

[Šmí69] Šmídová, J. *Pojetí diferenciální geometrie u Monge a Gausse*. Diplomová práce MFF UK, Praha, 1969.

[Ště64] Štěpánková–Budilová, J. *Význam Descartesovy geometrie pro analytickou geometrii*. Diplomová práce MFF UK, Praha, 1964.

[Stu77] Studnička, F. J. *Karel Bedřich Gauss*. JČMF, Praha, 1877.

Kapitola 6

Vývoj pojmu křivka na konci 19. a počátku 20. století

> *Ve vývoji každé vědní disciplíny, a matematika není výjimkou, se střídají období přímého rozpracování konkrétních problémů a období hledání unifikujících idejí. Tyto ideje ve svých důsledcích umožňují podstatně hlubší pohledy na společné principy několika dílčích oborů a spolupodílejí se tak na vytváření nových nástrojů na řešení konkrétních problémů. Erlangenský program sehrál tuto unifikující úlohu v rozvoji geometrie druhé poloviny 19. století.* I. Kolář [Fuc96a, str. 84]

V kapitole 5 jsme sledovali historii křivek až do okamžiku, kdy se v souvislosti s vývojem pojmu funkce, s upřesňováním základů matematické analýzy a rozvojem geometrie objevují u více matematiků současně snahy obecně definovat pojem křivka. Tato definice měla odpovídat intuitivní představě tenké čáry, která může být různě kroucená, případně protínat sebe sama. Devatenácté století je na historii geometrie neobyčejně bohaté a sledovat dále výsledky dosažené v teorii křivek v celé šíři zcela přesahuje možnosti jedné práce, i kdybychom se soustředili jen na ty zcela zásadní. Tato kapitola má proto spíše programový charakter a nastiňuje oblasti, kterým by se bylo možno v souvislosti s křivkami věnovat. Podrobně dále sledujeme jen vlastní definici pojmu křivka.

Na konci 19. století se objevují dvě významné definice rovinné křivky, které se „určitým způsobem“ velmi blíží naší intuitivní představě a po-

sloužily mnohým vědcům v další práci. V sekci 6.1 tyto definice podrobně rozebereme, ukážeme, v čem se odlišují od našeho intuitivního chápání rovinné křivky a jaký je jejich vzájemný vztah.

Klein svým *Erlangenským programem*[1] z roku 1872 otevřel cestu ke vzájemnému ovlivňování geometrie a algebraické teorie invariantů, což se projevilo i v pojetí geometrických objektů, mezi nimi také křivek. Klein zdůrazňuje, že geometrii je třeba chápat jako vícerozměrnou a v tomto duchu se vyvíjela i definice křivky (viz sekce 6.2). Snahy definovat pojem křivka jen s využitím vnitřních vlastností vrcholí v pracích Urysohna. Výkladem jeho přístupu k pojmu křivka na počátku 20. století se zabýváme podrobněji (viz odstavec 6.2.1). Tyto myšlenky byly zásadní pro koncepci teorie dimenze a ovlivnily nejen topologii. Ukazuje se však, že Urysohnova definice, ačkoliv je v mnoha ohledech precizní, nemůže sehrát roli „univerzální“ definice křivky. Neumožňuje totiž zkoumat lokální vlastnosti křivek. Jiný moderní přístup k pojmu křivka přináší diferenciální geometrie s tím, jak se začíná stále více pracovat s pojmem varieta. Pohled na křivku jako jednorozměrnou podvarietu je rozebrán v odstavci 6.2.2.

6.1. Rovinná křivka

6.1.1. Jordanova definice křivky

Francouzský matematik C. Jordan[2] zformuloval v osmdesátých letech 19. století tuto definici rovinné křivky:

Definice křivky (Jordanova). Rovinnou křivkou nazveme soubor bodů $X = [x, y]$ v rovině, jejichž souřadnice jsou dány rovnicemi

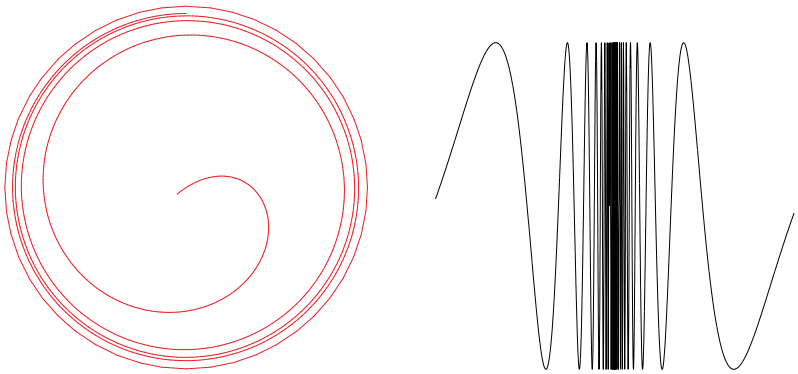
$$x = \phi(t), \qquad y = \psi(t),$$

kde ϕ, ψ jsou spojité funkce proměnné $t \in [0, 1]$.

Pokud bychom nahlíželi na proměnou t jako na čas, pak bod $X = [x, y]$ pohybující se v čase $t \in [0, 1]$ v rovině, opíše křivku. Tato definice zahrnuje kružnici, spirálu, lomenou čáru i mnohé další objekty, které odpovídají naší intuitivní představě křivky. Souřadnice bodů křivky jsou

[1] Felix Klein (1849–1925). Název *Erlangenský program* dostala jeho přednáška *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen (Srovnávací úvahy o novějších geometrických bádáních)*, kterou přednesl v roce 1872 na erlangenské univerzitě v souvislosti s nástupem na profesorské místo a která v tomtéž roce vyšla jako samostatná brožura.

[2] Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922).



(a) (b)

Obrázek 6.1: Příklady objektů, které nejsou křivkami ve smyslu Jordanovy definice

dány parametrickými rovnicemi, kde parametr nemusí být nutně čas, ale např. úhel, délka oblouku apod. Ze spojitosti funkcí $\phi,\ \psi$ plyne, že Jordanovy křivky jsou souviské objekty v tom smyslu, že jsou nedělitelné na dvě otevřené disjunktní množiny. Poznamenejme, že pokud je objekt nesouvislá množina, pak budeme uvažovat jednotlivé souvislé komponenty. V tomto smyslu bude např. také hyperbola složená ze dvou větví Jordanovou křivkou.

Ve speciálním případě, kdy existují pro funkce ϕ, ψ spojité derivace ϕ', ψ', lze snadno určit délku Jordanovy křivky

$$S = \int_0^1 \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

Tuto formuli uvádí Jordan v *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* publikované poprvé ve třech dílech v letech 1882–1887.[3]

Přestože se Jordanova definice jeví dosti obecná, lze najít příklady souvislých geometrických objektů, které bychom intuitivně považovali za rovinnou křivku, ale Jordanova definice je nezahrnuje:

Příklad 1. Objekt skládající se z kružnice k a spirály s, která se od středu nekonečně přibližuje této kružnici – viz. obr. 6.1(a), bychom jistě intuitivně zahrnuli mezi křivky, ale přitom to není křivka v Jordanově smyslu.

[3] Druhá edice vychází v roce 1893, třetí v letech 1909–1915, teprve třetí vydání obsahuje známou Jordanovu větu o rozdělení roviny uzavřenou křivkou na dvě části.

Tuto skutečnost ukážeme sporem. Předpokládejme, že objekt na obr. 6.1(a) je Jordanova křivka. Pak existují spojité funkce ϕ, ψ takové, že tento objekt je množinou bodů $X = [x, y]$, kde $x = \phi(t), y = \psi(t)$ $t \in [0, 1]$. Potom existuje uzavřená množina U taková, že kružnice k je jejím obrazem. Protože kružnice k je souvislá množina, je U také souvislá, tj. je uzavřeným podintervalem $U \subset [0, 1]$. Odtud plyne, že spirála s musí být obrazem otevřené množiny O, $O = [0, 1] \setminus U$. Otevřená množina O nutně obsahuje interval (a, b) takový, že body $M = [\phi(t), \psi(t)]$ pro $t \in (a, b)$ leží na spirále s, ale pro $t = a$ a $t = b$ už tyto body leží na kružnici k, tj. při přechodu

$$\lim_{t \to a+} [\phi(t), \psi(t)], \qquad \lim_{t \to b-} [\phi(t), \psi(t)],$$

bychom se měli dostat k bodům ležícím na kružnici k, což ale není možné vzhledem ke spojitosti funkcí $\phi,\ \psi$.

Příklad 2. Jiný příklad objektu, který bychom patrně také intuitivně zahrnuli mezi křivky, ale přesto není křivkou ve smyslu Jordanovy definice, je na obrázku 6.1(b). Objekt tvoří množina bodů $X[x, y]$, jejichž souřadnice jsou svázány rovnicí

$$y = \sin \frac{1}{x} \text{ pro } x \in [-a, a] \setminus \{0\},$$

sjednocená s úsečkou $[-1 \leq y \leq 1]$. Že se skutečně nejedná o Jordanovu křivku bychom ukázali analogicky jako v předchozím příkladě.

Skutečnost, že Jordanova definice nezahrnuje tyto objekty není pro matematiku nijak závažná. Lze říci, že tyto objekty jsou jistým způsobem „speciální“ a že je můžeme např. vyšetřovat po částech jako Jordanovy křivky. Daleko zásadnější se ukázala skutečnost, že Jordanova definice zahrnuje také objekty, které bychom v žádném případě za křivky nepovažovali. Této otázce se budeme věnovat podrobněji v odstavci 6.1.2.

6.1.2. Zobrazení mezi úsečkou a čtvercem

Konstrukce Cantora

Už v roce 1874 píše G. Cantor R. Dedekindovi[4], že ho poslední dobou zajímá otázka, zda je možné vzájemně jednoznačně zobrazit plochu na křivku (např. čtverec na úsečku) a zmiňuje, že momentálně mu přijde

[4] Julius Wihelm Richard Dedekind (1831–1916).

obtížné dokázat odpověď na tuto otázku. Ještě téhož roku píše Dedekindovi, že mluvil o této otázce s kamarádem v Berlíně a ten mu řekl, že je zřejmá odpověď „ne“, protože převést více souřadnic na jednu je absurdní.[5]

O tři roky později, v dopise Dedekindovi z 20. 6. 1877, píše Cantor, že dokázal existenci takového vzájemně jednoznačného zobrazení a podává jeho konstrukci. Popíšeme hlavní myšlenku:

Uvažujme jednotkový čtverec $[0,1]\times[0,1]$, jehož body označíme $X = [x,y]$, a jednotkovou úsečku $[0,1]$, na které jsou body o souřadnici $[z]$. Sestrojíme zobrazení $\varphi : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$. Souřadnice bodů čtverce vyjádříme v nekonečných desetinných rozvojích

$$\begin{aligned} x &= 0, x_1x_2x_3x_4\ldots \\ y &= 0, y_1y_2y_3y_4\ldots \end{aligned} \tag{6.1}$$

kde $x_i, y_i,\ i = 1,2,3,\ldots$, jsou celá čísla z množiny $\{0,1,\ldots,8,9\}$. Aby byl nekonečný rozvoj za desetinnou čárkou jednoznačný, vyloučíme čísla, jejichž rozvoj končí nekonečnou posloupností nul, tj.

$$\begin{aligned} 0,23000\ldots &=> 0,22999\ldots \\ 1 &=> 0,99999\ldots \text{ apod.} \end{aligned}$$

Potom každý bod čtverce vyjádřený v souřadnicích (6.1) se zobrazí na bod úsečky o souřadnici $z = 0, x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots$ a naopak ke každému bodu úsečky o souřadnici $z = 0, z_1z_2z_3z_4z_5z_6\ldots$ najdeme odpovídající bod čtverce $X[x,y]$, kde $x = 0, z_1z_3z_5\ldots$, $y = z_2z_4z_6\ldots$.

O dva dny později Dedekind píše Cantorovi, že jeho zobrazení není vzájemně jednoznačné, protože dvěma různým bodům na jednotkové úsečce, odpovídá stejný bod ve čtverci. Ukážeme příklad v našem označení:

$$\begin{aligned} z = 0,1210101010\ldots, \quad &\to x = 0,11111\ldots \\ &\quad\ y = 0,20000\ldots => 0,19999\ldots \\ \overline{z} = 0,11191919\ldots, \quad &\to \overline{x} = 0,11111\ldots \\ &\quad\ \overline{y} = 0,19999\ldots \end{aligned}$$

Hned druhý den Cantor odpovídá, že Dedekindova námitka je správná, ale naštěstí se vztahuje jen k důkazu a nikoliv k faktu samotnému. Následně podává jiný důkaz.[6] Nastíníme opět jeho hlavní myšlenku. Cantor nejprve sestrojí vzájemně jednoznačné zobrazení mezi jednotkovým

[5] Dopisy Dedekindovi z 5. 1. 1874 a 18. 1. 1874 v [Can85, str. 334].
[6] Dopisy z 20.6., 22.6. a 23.6.1874 v [Can85, str. 337–340].

čtvercem obsahujícím jen body s iracionálními souřadnicemi a jednotkovým intervalem obsahujícím jen iracionální čísla, potom ukáže existenci vzájemně jednoznačného zobrazení mezi jednotkovým intervalem iracionálních čísel a jednotkovým intervalem všech reálných čísel. Z toho plyne existence vzájemně jednoznačného zobrazení $\varphi : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$.

Při konstrukci zobrazení intervalu iracionálních čísel na jednotkový čtverec obsahující body s iracionálními koeficienty použil Cantor fakt známý z teorie čísel, že každé iracionální číslo q lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$q = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \cdots}}}} = (q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots)$$

Poté Dedekind píše Cantorovi:

Ještě jednou jsem prověřil Váš důkaz a nenašel jsem v něm mezeru. Jsem přesvědčen, že Vaše zajímavá věta je pravdivá a gratuluji Vám. Avšak, jak jsem Vám už sdělil na lístku, chtěl bych vyslovit jednu námitku, proti úvahám, které jste přidal k Vašemu dopisu z 25. června a které se týká pojetí spojité variety. Dopis z 2.7.1874 v [Can85, str. 346–347].

Dedekind následně reaguje na Cantorovo příkré vyjádření k invariantnosti počtu nezávislých souřadnic u spojitých variet. Upozorňuje Cantora, že jeho zobrazení není spojité, píše:

Souhlasím s vámi, že je třeba to dokázat a nebylo to dosud dokázáno, avšak já nepochybuji o této invariantnosti počtu souřadnic, i když se možná na první pohled zdá, že je narušena Vaší větou. [...] *Věřím ve správnost věty: Je-li možné vzájemně jednoznačně zobrazit množinu A dimenze a na množinu B dimenze b, $a \neq b$, potom toto zobrazení nemůže být spojité.* [...] *Tento dopis nemá jiný účel než, že Vás chci poprosit, abyste nezačínal veřejnou polemiku proti dosud uznaným a publikovaným článkům z teorie variet dokud neproberete hlouběji moje námitky.* Dopis z 2.7.1874 v [Can85, str. 346–347].

Cantorovy výsledky byly publikovány v roce 1878.[7] Dedekindem předjímaná věta, že spojité množiny různých dimenzí nelze zobrazit jednu na

[7] *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.* J. reine und angew. Math., 1878, 84, str. 242–258. Také v ruském překladu v [Can85, str. 22–39].

druhou spojitě a vzájemně jednoznačně byla dokázána teprve roku 1910 Brouwerem.[8]

Tyto úvahy však vedly už na konci století k vyšetřování takovýchto zobrazení a k dalším důsledkům pro definici křivky.

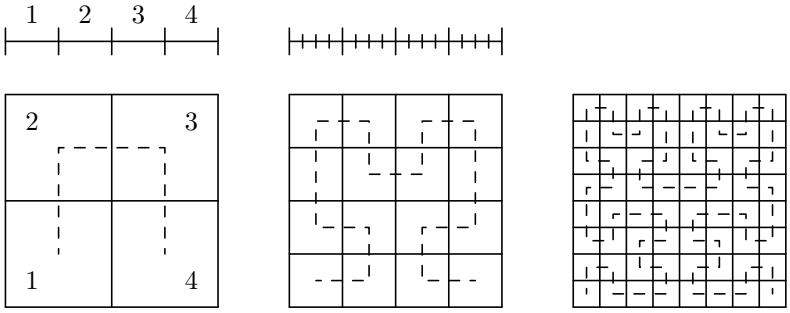
Konstrukce Peana

V roce 1890 popsal italský matematik Peano[9] spojitá zobrazení ϕ, ψ taková, že body $X = [\phi(t), \psi(t)], t \in [0,1]$ vyplní celý jednotkový čtverec.[10] Důsledkem jím podaného příkladu je, že čtverec je křivkou ve smyslu Jordanovy definice.

Definice. Peanovou křivkou budeme nazývat libovolnou Jordanovu křivku vyplňující plochu čtverce.

Ukažme konstrukci takového zobrazení úsečky $[0,1]$ na čtverec. Tento příklad nepatří Peanovi, ale sestrojil ho Hilbert[11] v roce 1891.

Příklad 3. Úsečku $[0,1]$ budeme postupně dělit: nejdříve na 4 stejné části, pak každou z těchto částí opět na 4 stejné, takže v n-tém kroku budou délky příslušných úseček $D_n = \frac{1}{4^n}$. Obdobně můžeme postupně dělit čtverec: nejdříve na 4 stejné části, pak každou z těchto částí opět na 4, takže v n-tém kroku budou délky příslušných stran čtverce $K_n = \frac{1}{2^n}$. Na obrázku 6.2 je ukázáno, jakým způsobem provedeme přiřazení



Obrázek 6.2: Hilbertův příklad konstrukce zobrazení úsečky na čtverec

[8] Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966), Math. Ann., 1970, 10, str. 161–165.

[9] Giuseppe Peano (1858-1932).

[10] Peano G. *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, 1890, Math. Ann. 36, 137–160. Felix Hausdorff (1868–1942) publikoval jeho výsledky v *Grundzüge der Mengenlehre* 1914, Leipzig (reprint 1949, 1965).

[11] David Hilbert (1862–1943).

čtverců jednotlivým částem úsečky braným zleva doprava. Dostaneme postupně pro každé dělení vzájemně jednoznačný vztah mezi segmentem úsečky a segmentem čtverce. V tomto procesu můžeme do nekonečna pokračovat. Pro délky úseček platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} = 0 \tag{6.2}$$

a pro délky stran čtverců platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0, \tag{6.3}$$

tj. obě délky budou konvergovat k nule. Tento proces umožňuje konstrukci spojitého zobrazení úsečky na čtverec. Pro $n \to \infty$ každému bodu úsečky odpovídá jeden bod čtverce, ale naopak jednomu a témuž bodu čtverce může být vzorem více různých bodů úsečky – z obrázku je zřejmé, že střed čtverce odpovídá třem různým bodům úsečky a vrcholy dokonce čtyřem bodům úsečky apod. Jinak řečeno pouze body, které jsou vnitřními body čtverců všech řádů mají tu vlastnost, že každý z nich odpovídá jen jednomu bodu úsečky.

Přirozeně vzniká otázka, čím oddělit Peanovy křivky z Jordanových. Ve smyslu předchozích úvah je patrné, že nebude splněna jednoznačnost zobrazení, tj. ukazuje se, že platí následující věta:

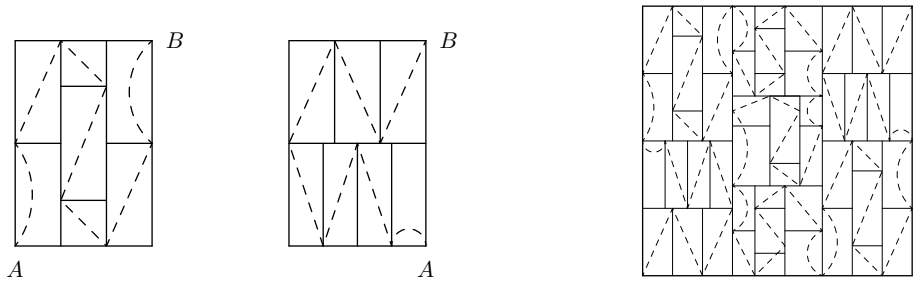
Věta 6.1. Každá Peanova křivka obsahuje násobné body.

Jinak řešeno: spojitá zobrazení ϕ, ψ v definici Jordanovy křivky (viz str. 202) jsou surjektivní ale nikoliv bijektivní. Důkaz tohoto tvrzení viz např. [Luz48, str. 215]. Platí dokonce silnější tvrzení:

Věta 6.2. Neexistuje Peanova křivka, která by obsahovala jen jednonásobné a dvojnásobné body.

Tj. každá Peanova křivka musí obsahovat minimálně trojnásobné body. Tato množina trojnásobných bodů je spočetná. V Hilbertově příkladu (viz příklad 3) existovaly nejen trojnásobné ale i čtyřnásobné body. Příklad podaný Peanem neobsahuje více než trojnásobné body, byl tedy nejen historicky první, ale i ve smyslu předchozí věty optimální. Jeho konstrukce je složitější než konstrukce Hilbertova příkladu, ale princip si lze představit podle obrázku 6.3.

Věty 6.1 a 6.2 mají velký principiální význam v geometrii, neboť dávají možnost pochopit význam dimenze. Ukazují, v čem je rozdíl mezi dimenzí roviny a přímky. Protože, jak ukázal Cantor, ve smyslu mohutnosti mezi nimi rozdíl není. Ale i když mezi těmito dvěma množinami existuje vzájemně jednoznačné zobrazení (bijekce), toto zobrazení nemůže být oboustranně spojité.



Obrázek 6.3: Peanův příklad konstrukce zobrazení, které zobrazí úsečku na čtverec

6.1.3. Cantorova definice křivky

Riemannovy práce daly jeden ze základních impulzů nejen k rozvoji topologie, ale inspirovaly také Cantora při vytváření teorie množin.[12] Ke konci 19. století začíná teorie množin do matematiky stále více pronikat. Každý matematický objekt je považován za množinu prvků, geometrické objekty jsou potom množinami bodů. Pojem *množina* se již nijak nedefinuje a je považován za pojem základní.

V souvislosti se vznikem teorie množin se objevuje u Cantora definice křivky založená na množinovém pojetí, která v podstatě jazykem teorie množin popisuje to, co intuitivně vytyčil Riemann. Dnešním jazykem bychom ji zformulovali následovně:

Definice křivky (Cantorova). Rovinnou křivkou nazveme rovinné kontinuum neobsahující žádný vnitřní bod.

Kontinuum je zde chápáno ve smyslu množiny, která je současně souvislá a kompaktní.

Příklad 4. Kružnice daná parametrickými rovnicemi

$$x = \cos t,\ y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

je křivkou ve smyslu Cantorově. Také všechny další běžné rovinné křivky.

Příklad 5. Není těžké si rozmyslet, že i objekty na obrázku 6.1 jsou Cantorovými křivkami.

[12] Viz [Aul97, str. 263].

Příklad 6. Významným příkladem rovinné Cantorovy křivky je křivka, kterou zkonstruoval W. Sierpinský[13] a která dostala po něm název ***Sierpinského koberec***.

Uvažujme čtverec, který rozdělíme na 9 stejných čtverců, přičemž z něj vyloučíme vnitřek prostředního čtverce (viz obr. 6.6 d). Každý ze zbývajících osmi čtverců znovu rozdělíme na 9 stejných čtverců a z každého z nich opět vyloučíme vnitřek prostředního čtverce. Tak dostaneme $8^2 = 64$ čtverců. Zopakováním procesu dostaneme v dalším kroku $8^3 = 512$ čtverců a tak dále pro libovolné číslo $n \in \mathbb{N}$. Množina bodů, kterou obdržíme pro $n \to \infty$ se nazývá ***Sierpinského koberec*** a tato množina je křivkou ve smyslu Cantorovy definice.[14]

Sierpinského koberec má navíc zajímavou vlastnost, totiž obsahuje libovolnou rovinnou křivku. Přesně řečeno:

Tvrzení. Pro libovolnou Cantorovu křivku C existuje v Sierpinského koberci podmnožina C' homeomorfní s množinou C.

Je zřejmé, že Cantorova definice vylučuje Peanovy křivky. Na druhé straně se ukazuje, že zahrnuje jiné objekty, které bychom intuitivně jistě nezahrnuli mezi křivky jako např. Sierpinského koberec.

Bude zajímavé podívat se blíže na vztah mezi křivkou ve smyslu Jordanově a křivkou ve smyslu Cantorově.

6.1.4. Vztah mezi Jordanovou a Cantorovou definicí rovinné křivky

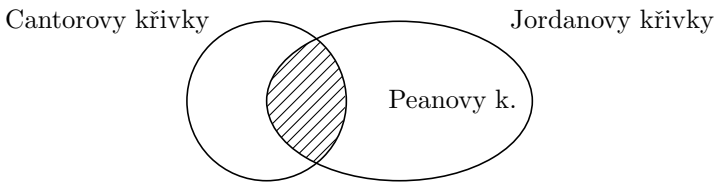
Ačkoliv by se na první pohled mohlo zdát, že obě definice vzešly ze zcela odlišného základu – Jordanova definice z poznatků matematické analýzy a Cantorova definice jako pojem rodící se teorie množin, není tomu pravděpodobně tak. Jordan je dnes znám především díky svému důkazu, že jednoduchá uzavřená (Jordanova) křivka rozděluje rovinu přesně na dvě oblasti, což je jedna z nejznámějších vět topologie.[15] Přesné znění tohoto tvrzení uvádíme ve větě 6.3. Jordan už v roce 1866 zavedl důležité topologické pojmy a seznámil se s Riemannovu prací o topologii.

[13] Waclaw Sierpinski (1882–1969).

[14] Je třeba ukázat, že (a) množina je kontinuum a (b) neobsahuje vnitřní bod. Množina je kontinuum, protože je společnou částí posloupnosti kontinuí – první kontinuum je složeno z 8 čtverců, druhé z 64, třetí z 512 atd. a každé následující kontinuum je obsaženo v kontinuu předcházejícím. Ani jeden bod tohoto kontinua není vnitřním bodem, protože v libovolně blízkém okolí libovolného bodu můžeme vždy nalézt bod patřící do některého čtverce, který jsme vyloučili.

[15] Objevila se ve třetím vydání práce "Cours d'analyse de l'École Polytechnique" v letech 1909 až 1915.

Cantor proti tomu pracuje v matematické analýze a teprve otázky kolem Fourierových řad ho přivádí k základním myšlenkám teorie množin.



Obrázek 6.4: Vztah mezi Jordanovou a Cantorovou definicí křivky

Obrázek 6.4 ukazuje jaký je vztah mezi oběma definicemi. Viděli jsme, že existují objekty, které jsou křivkou ve smyslu Jordanově, ale nejsou křivkou ve smyslu Cantorově (viz Peanovy křivky) a také jsme ukázali objekty, které jsou křivkou ve smyslu Cantorově a nejsou křivkou ve smyslu Jordanově (viz obr. 6.1).

Podmínka pro to, aby Jordanova křivka byla křivkou Cantorovou je přímým důsledkem vět 6.1 a 6.2:

Tvrzení. Každá Jordanova křivka, která není křivkou Peanovou je křivkou v Cantorově smyslu.

Přirozeně vzniká otázka, jaké podmínky musíme dodat, aby Cantorova křivka byla křivkou Jordanovou. Takových podmínek bylo nalezeno několik:

Tvrzení. Aby rovinné kontinuum C bylo Jordanovou křivkou, je nutné a stačí, aby libovolné dva body M_1, M_2 libovolně blízké bylo možno spojit kontinuem C', $C' \subset C$, jehož poloměr konverguje k nule.

S těmito úvahami přímo souvisí tzv. Jordanova věta, která se v populárním znění uvádí ve tvaru:

Tvrzení. Každá uzavřená jednoduchá křivka dělí rovinu na dvě oblasti – vnitřní a vnější.

My ovšem nyní již tušíme, že by bylo třeba nejdříve vymezit, co je v tomto tvrzení míněno pojmem křivka, uvedeme proto Jordanovu větu v matematicky preciznějším tvaru:[16]

Označme S_1 kružnici, S_2 sféru.

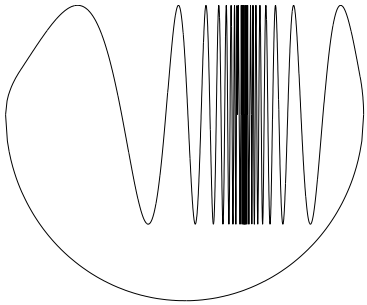
[16] Viz např. [Pul86, str. 158].

Věta 6.3 (Jordanova). Buď X topologický prostor homeomorfní s $\mathbb{E}_2$ nebo S_2, buď $Y \subset X$ homeomorfní s S_1. Potom $X \setminus Y$ má právě dvě komponenty.

Poznamenejme ještě, že v prostorech vyšší dimenze není situace zdaleka tak jednoduchá a Jordanovu větu lze uvést jen ve slabším tvaru.[17] Nyní zformulujeme další zajímavou podmínku pro to, aby dané kontinuum bylo Jordanovou křivkou:

Tvrzení. Aby ohraničené kontinuum C, které dělí rovinu na dvě oblasti bylo uzavřenou Jordanovou křivkou, je nutné a stačí, aby každý bod M tohoto kontinua C byl koncem dvou spojitých čar L a L', které sestávají ze spočetně mnoha vzájemně navazujících úseček, přičemž jedna z nich sestává z bodů vnitřní oblasti (kromě bodu M) a druhá sestává z bodů vnější oblasti (kromě bodu M).

Na obrázku 6.5 je příklad kontinua, které dělí rovinu na dvě oblasti, ale není Jordanovou křivkou.



Obrázek 6.5: Příklad kontinua, které dělí rovinu na dvě oblasti, ale není křivkou ve smyslu Jordanovy definice

6.2. Křivka v prostoru dimenze n

V úvodu práce *Les multiplicités Cantoriennes (O Cantorových varietách)* z roku 1922 píše Urysohn:[18]

Problém čistě geometrické definice křivky v současné době není plně řešen. [Ury51, str. 219]

[17] **Jordanova věta pro prostory vyšší dimenze:** Buď X topologický prostor homeomorfní s $\mathbb{E}_n$ nebo S_n. Každá podmnožina $A \subset X$, která je homeomorfní s S_{n-1}, roztíná X .

[18] Pavel Samujlovič Urysohn (1898–1924).

Dále uvádí, že v té době byly známy tři definice křivky – definice Cantorova, definice Zorettiho[19] a definice Janiszewského,[20] ale tyto definice byly míněny jen pro rovinné křivky.

Prostý přenos Cantorovy definice (viz str. 209) do prostoru není možný, už v trojrozměrném prostoru nebude vyhovovat, protože např. čtverec je v prostoru $\mathbb{E}_3$ kontinuum bez vnitřních bodů.

O definici křivky v trojrozměrném prostoru se pokusil Zoretti:[21]

Definice křivky (Zorettiho). Budeme říkat, že trojrozměrné continuum je křivkou, lze-li pro každý bod této množiny najít alespoň jednu rovinu, která nemá s touto množinou společné continuum.

Ale je zřejmé, že každá uzavřená konvexní množina v $\mathbb{E}_3$ by potom byla křivkou. Janiszewski v podstatě pouze upravil Jordanovu definici:

Definice křivky (Janiszewského). Křivkou budememe nazývat jednoduchý oblouk, tj. topologický obraz úsečky.

Jinak řečeno Jordanovy křivky bez násobných bodů. Tato definice sice vyhovuje i pro prostorové křivky, ale zužuje se jen na křivky prosté.

Urysohn přidává jiný pohled

Topologie (Analysis situs) je větev geometrie, která zkoumá vlastnosti množin invariantní vůči homeomorfismům (t. j. vzájemně jednoznačným a spojitým zobrazením). Z toho plyne, že takové základní pojmy jiných oborů geometrie jako přímka, rovina atd. v obyklém pojetí nemají v topologii smysl, protože nemají v ukázaném smyslu invariantnost. Proto je musíme změnit na takové pojmy jako křivka, povrch atd. Jde v prvé řadě o to definovat, co tyto pojmy znamenají; přesněji řečeno jde o to definovat např. třídu množin, které by byly topologicky invariantní a obsahovaly každou množinu, kterou rozumíme pod pojmem „křivka“ a neobsahovaly žádnou, které my tento název dát nemůžeme. První, co přijde na mysl, je nazvat „křivkou“ takovou množinu, která je homeomorfní s úsečkou, „plochou“ množinu, která je homeomorfní s obdélníkem. A při libovolném n, množinu homeomorfní s n-rozměrnou krychlí. [Ury51, str. 229–230]

Dále Urysohn píše, že tato definice je v jistém smyslu výhodná, a připomíná na ní postavené práce Brauera, ale vytyčuje dvě její nevýhody

- je negeometrická, protože vyžaduje zobrazení, tj. *funkci*

[19] Ludovic Zoretti (1880–1948).
[20] Zygmunt Janiszewski (1888–1920).
[21] *Contribution à l'étude des lignes Cantoriennes*, Acta Math. 36, 1912, str. 267.

- n-rozměrná krychle není topologickým objektem.

V dnešní době lze těžko souhlasit s tím, že by zobrazení nepatřilo do geometrie,[22] ale jen to ukazuje, jak byl přijímán pojem funkce ještě v roce 1922 (viz odst. 5.1). Úkolem tedy zůstává vyjádřit n-rozměrnou krychli jako topologický prostor. Přičemž nás bude vzhledem k vytyčenému tématu zajímat pouze prostor jednorozměrný. Urysohn označuje problém J_n:

Problém J_n: Podat čistě geometrickou definici n-rozměrných Jordanových množin.

[Ury51, str. 230]

Dále píše, že problém J_1 (geometrická definice Jordanových křivek) je řešen v disertaci Janiszewského, ale stejným způsobem definovat plochy se mu nepodařilo. Ovšem čistě matematický význam problémů J_n je malý, jde spíše o problém filozofický. V matematice

dokud se nenajde dobrá definice, používá se s úspěchem špatná, ale logicky správná. [Ury51, str. 231]

Urysohn dále píše, že situace se mění, tj. matematický význam začíná převažovat nad filozofickým, pokud se vrátíme k problému uvedenému v počátku. Tento problém označuje jako K_n:

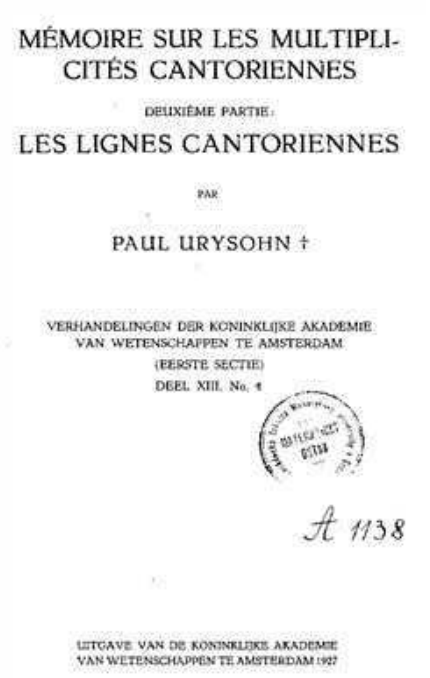
Ukázat nejobecnější množiny, které lze ještě pojmenovat křivkou, plochou apod.
Tady nemáme žádnou definici; tím způsobem vidíme, že tyto problémy (které budeme nazývat problémy K_1, K_2 apod.) mají úplně jiný význam. [Ury51, str. 231]

Dále píše, že problém K_1 byl řešen Cantorem, ale jeho definici nelze přenést z roviny ani do trojrozměrného prostoru.

My musíme nejdříve řešit problém K_1, t.j. podat novou definici cantorových křivek, protože dřívější definice, jak jsme ukázali se jeví nedostatečné. [...] *Cantorova definice není vnitřní, používá vztahy mezi množinami a body, které nepatří do této množiny. Takové množiny se pak budou v jiných prostorech měnit.* [Ury51, str. 232]

Přejdeme nyní k definici křivky, kterou podal Urysohn:

[22] V tomto smyslu komentuje Urysohnovy spisy i Alexandrov v roce 1951. Viz [Ury51, 488].



MÉMOIRE SUR LES MULTIPLICITÉS CANTORIENNES

DEUXIÈME PARTIE:

LES LIGNES CANTORIENNES

PAR

PAUL URYSOHN †

VERHANDELINGEN DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM

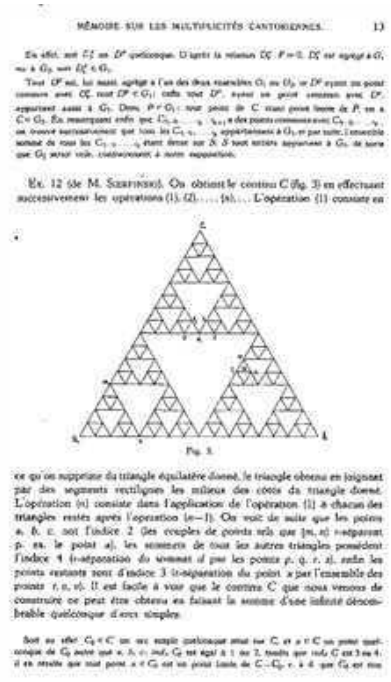
(EERSTE SECTIE)

DEEL XIII, No. 4

A 1138

UITGAVE VAN DE KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM 1927

(a) Titulní strana



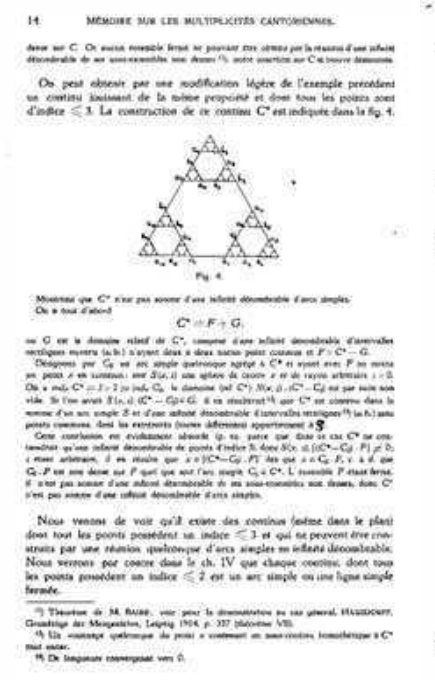
MÉMOIRE SUR LES MULTIPLICITÉS CANTORIENNES. 13

Ex. 12 (de M. Sierpinski). On obtient le continu C (fig. 3) en effectuant successivement les opérations (1), (2), ..., (n), ... L'opération (1) consiste en

Fig. 3.

ce qu'on supprime du triangle équilatère donné, le triangle obtenu en joignant par des segments rectilignes les milieux des côtés du triangle donné. L'opération (n) consiste dans l'application de l'opération (1) à chacun des triangles restés après l'opération (n−1). On voit de suite que les points a, b, c, ont l'indice 2 (les couples de points tels que $[m, n)$ n-séparent p. ex. le point a), les sommets de tous les autres triangles possèdent l'indice 4 (n-séparation du sommet a par les points p, q, r, s), enfin les points restants sont d'indice 3 (n-séparation du point x par l'ensemble des points r, s, v). Il est facile à voir que le continu C que nous venons de construire ce peut être obtenu en faisant la somme d'une infinité dénombrable quelconque d'arcs simples.

(b) Strana 13

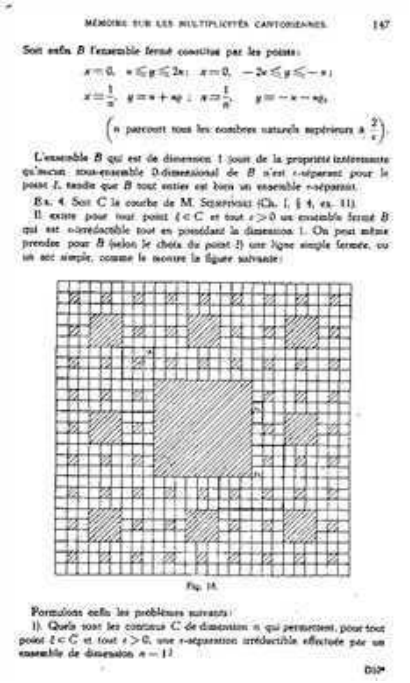


14 MÉMOIRE SUR LES MULTIPLICITÉS CANTORIENNES.

Fig. 4.

Nous venons de voir qu'il existe des continus (même dans le plan) dont tout les points possèdent un indice $\leqslant 3$ et qui ne peuvent être construits par une réunion quelconque d'arcs simples en infinité dénombrable. Nous verrons par contre dans le ch. IV que chaque continu, dont tous les points possèdent un indice $\leqslant 2$ est un arc simple ou une ligne simple fermée.

(c) Strana 14.



MÉMOIRE SUR LES MULTIPLICITÉS CANTORIENNES. 147

Soit enfin B l'ensemble fermé constitué par les points:

$$x = 0, \quad u \leqslant y \leqslant 2u; \quad x = 0, \quad -2v \leqslant y \leqslant -v;$$

$$x = \frac{1}{n}, \quad y = u + v_0; \quad x = \frac{1}{n}, \quad y = -u - v_0,$$

$\left(n \text{ parcourt tous les nombres naturels supérieurs à } \frac{2}{\varepsilon}\right)$.

L'ensemble B qui est de dimension 1 jouit de la propriété intéressante qu'aucun sous-ensemble 0-dimensional de B n'est ε-séparant pour le point L, tandis que B tout entier est bien un ensemble ε-séparant.

Ex. 4. Soit C la courbe de M. Sierpinski (Ch. I, § 4, ex. 11).

Il existe pour tout point $L \subset C$ et tout $\varepsilon > 0$ un ensemble fermé B qui est ε-irréductible tout en possédant la dimension 1. On peut même prendre pour B (selon le choix du point L) une ligne simple fermée, ou un arc simple, comme le montre la figure suivante:

Fig. 18.

Formulons enfin les problèmes suivants:

1). Quels sont les continus C de dimension n qui permettent, pour tout point $L \subset C$ et tout $\varepsilon > 0$, une ε-séparation irréductible effectuée par un ensemble de dimension $n-1$?

(d) Sierpinského koberec, str. 147.

Obrázek 6.6: Ukázka z *Les lignes Cantoriennes* z roku 1927, [Ury27]

6.2.1. Urysohnova definice křivky

Urysonova definice se vyznačuje tím, že je vnitřní, tj. používá jen vlastnosti samotného prostoru C a nezávisí na tom, zda se na tento prostor pohlíží jako na podmnožinu jiného topologického prostoru nebo na množinu samu o sobě.

Řečeno dnešními termíny:

Definice křivky (Urysohnova). Křivkou rozumíme kontinuum dimenze 1.

Urysohn pojem dimenze kontinua precizně buduje. Tyto úvahy o křivkách jsou součástí jeho spisů o teorii dimenze, proto bude zajímavé podívat se na to, jak přistupuje k definice křivky podrobněji.

Nejprve zavádí pojem ε–oddělitelnosti bodu $x \in C$:

Definice. Nechť C je množina, $x \in C$. Nechť $C = A \cup B \cup D$, kde A, B, D jsou po dvou disjunktní. Trojici A, B, D nazveme ε–oddělitelná, jestliže je splněno

$$\begin{aligned} &a) x \in A \\ &b) (A \cap \overline{D}) \cup (\overline{A} \cap D) = \emptyset \\ &c) A \cup B \subset O_{x,\varepsilon}, \end{aligned} \tag{6.4}$$

kde $O_{x,\varepsilon}$ je ε-ové okolí bodu x.
Potom budeme říkat o množině B, $(B \subset C)$, že ε–odděluje bod $x \in C$.

Definice. Může-li bod x množiny C být ε–oddělitelný prázdnou množinou pro libovolně malé ε, pak budeme říkat, že množina C v bodě x má rozměr 0 nebo bod x je dimenze 0 vzhledem k C

$$\dim_x C = 0.$$

Definice. Jestliže všechny body množiny C mají dimenzi 0, potom říkáme, že množina C má dimenzi 0

$$\dim C = 0.$$

Množinu dimenze 0 zavedl Sierpinski (viz obr. 6.6 d). Vyšší dimenze definuje Urysohn indukcí:

Definice. Bod x množiny C, který není bodem dimenze $< n$, ale pro každé ε může být ε–oddělitelný množinou B, $\dim B < n$, nazýváme bodem dimenze n

$$\dim_x C = n.$$

(Občas budeme říkat, že množina C má v bodě x dimenzi n.)

Definice. Množinu C mající ve všech bodech dimenzi $\leq n$ nazýváme množinou dimenze n

$$\dim C = n$$

pokud má dimenzi n alespoň v jednom bodě.

Po některých úvahách o definovaném pojmu dimenze uvádí důležité věty, z nichž některé vybíráme

Tvrzení. Dimenze je topologickým invariantem.[23]

Tvrzení. Každé uzavřené diskontinuum je množina dimenze 0.[24]

Tvrzení. Pro to, aby diskontinuum bylo homeomerfní podmnožině přímky je nutné a stačí aby bylo dimenze 0.[25]

V kapitole *Předběžné zkoumání dimenze. Eukleidovy dvojrozměrné a trojrozměrné prostory* se vrací k úvahám o křivkách:

Vnitřní bod množiny prostoru $\mathbb{E}_1$ je bod dimenze 1. Hraniční bod, který není limitním bodem vnitřních bodů, je bod dimenze 0. Hraniční bod, který je limitním bodem vnitřních bodů může mít dimenzi 0 i 1. [Ury51, str. 285]

Nechť $C \subset \mathbb{E}_2$. Každý vnitřní bod množiny C má dimenzi 2. Každý bod, který není vnitřním bodem ani limitou vnitřních bodů, má dimenzi 0 nebo 1 a konečně hraniční body, které jsou limitní body vnitřních bodů množiny C, mohou mít dimenzi 0, 1 nebo 2. [Ury51, str. 295]

Po zavedení pojmu dimenze přistupuje ke křivce jako ke kontinuu dimenze jedna, tj. křivkou se rozumí jednorozměrné kontinuum C, jehož každý bod má libovolně malé okolí, jehož hranice má nulovou dimenzi. Jinak řečeno pro libovolné $\varepsilon > 0$ lze prostor C vyjádřit jako sjednocení konečného počtu uzavřených množin o průměru menším než ε, které mají tu vlastnost, že žádné tři z těchto množin nemají společný bod.

Snadno se přesvědčíme, že úsečka nebo kružnice jsou jednoduché příklady jednorozměrných kontinuí, tj. křivek ve smyslu Urysohna. Samotný Sierpinského koberec je křivkou ve smyslu Urysohna, tedy platí

Tvrzení. Každá Cantorova křivka je také křivkou ve smyslu Urysohna.

[23] Důkaz viz [Ury51, str. 271].
[24] Důkaz viz [Ury51, str. 278].
[25] Tato věta patří Sierpinskému. Viz [Ury51, str. 280].

A obráceně

Věta 6.4. Každá **rovinná** křivka ve smyslu Urysohna je Cantorovou křivkou.

Důkaz tohoto tvrzení plyne z toho, že žádná rovinná křivka ve smyslu Urysohnově neobsahuje jako svou podmnožinu část roviny s vnitřními body.

Sporem: Jestliže rovinné kontinuum C obsahuje vnitřní bod x, potom pro dostatečně malé $\varepsilon > 0$ náleží celé ε-ové okolí bodu x do kontinua C. Avšak potom hranice každé otevřené množiny ležící v ε-ové okolí bodu x obsahuje kontinuum, což je spor. Proto kontinuum, které je křivkou ve smyslu Urysohna, neobsahuje žádný vnitřní bod, tj. je křivkou ve smyslu Cantorově.

Důležitým rysem Urysohnovy definice křivky je jednorozměrnost kontinua. Nejen, že vystihuje podstatu tohoto pojmu, ale ukazuje cestu, kterou postupovat při studiu obecných vlastností křivky.

Urysohn klasifikuje podrobně body křivky podle jejich indexu větvení.

Definice. Minimální počet bodů na hranici otevřených množin O_x (z definice Urysohnovy křivky) se nazývá indexem větvení křivky v daném bodě a značíme ho I_v.

Příklad 7. Index větvení může být jak konečný, tak nekonečný:

(a) Úsečka má v každém svém vnitřním bodě index větvení $I_v = 2$ a v koncových bodech $I_v = 1$.

(b) Příkladem kontinua, jehož všechny body mají $I_v = \infty$ je Sierpinského koberec.

(c) Uvažujme křivku složenou z úseček PQ_i, $i = 1, \ldots, n$ jednotkové délky, přičemž všech n úseček vychází z bodu P. Tato křivka má v bodě P index větvení $I_v = n$, ve vnitřních bodech jednotlivých úseček $I_v = 2$ a v koncových bodech $I_v = 1$.

(d) Uvažujme křivku složenou z úseček PQ_i, $i = 1, \ldots, n$ vycházejících z bodu P, které mají postupně délky 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\ldots$, $\frac{1}{2^n}$ a svírají po řadě s osou x úhly $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{8}$, $\ldots$, $\frac{\pi}{2^{n+1}}$. Délky těchto úseček i úhly, které svírají s osou x konvergují k nule. Bod P této křivky má tu zajímavou vlastnost, že při libovolně malém ε je v průniku ε-ového okolí bodu P s danou křivkou jen konečný počet bodů, který ale

pro $\varepsilon \to 0$ roste do nekonečna. V tomto případě říkáme, že křivka má v bodě P konečný, ale neomezený index větvení.

(e) Křivku C budeme konstruovat z rovnostranného trojúhelníka. Sestrojíme spojnice středů stran, čímž rozdělíme trojúhelník na 4 shodné rovnostranné trojúhelníky a vyloučíme vnitřní oblast prostředního z nich. Stejný postup zopakujeme s každým ze zbylých trojúhelníků, obdržíme 9 rovnostranných trojúhelníků. Opakováním obdržíme v dalším kroku 27 trojúhelníku atd. (viz obr. 6.6(b)). Množina bodů, která vznikne v n-tém kroku, je kontinuum složené z 3^n trojúhelníků. Pro $n \to \infty$ má toto kontinuum rozměr 1, tj. je křivkou ve smyslu Urysohna. Vrcholy základního trojúhelníka mají index vetvení $I_v = 2$, vrcholy ostatních trojúhelníků $I_v = 4$ a všechny ostatní body $I_v = 3$.

(f) Modifikací příkladu (e) můžeme snadno dosáhnout toho, že výsledná křivka bude mít jen body s $I_v = 2$ nebo s $I_v = 3$. Stačí abychom uvažovali místo spojnic středů např. úsečky, které spojují body v třetinách každé strany, a abychom vylučovali vnitřní body šestiúhelníku (viz obr. 6.6(c)).

Uvedeme alespoň bez důkazu několik vět, které ilustrují, jak výstižně index větvení charakterizuje danou křivku:

Definice. Body, pro jejichž index větvení platí $I_v > 2$ nazýváme rozvětvovací body křivky.

Tvrzení. Křivka, která nemá rozvětvovací body, je buď jednoduchou uzavřenou křivkou nebo jednoduchým obloukem. Jestliže $I_v = 2$ ve všech bodech křivky, pak je jednoduchou uzavřenou křivkou (tj. topologickým obrazem kružnice). Má-li křivka i koncové body, pro něž $I_v = 1$, pak je jednoduchým obloukem (tj. topologickým obrazem úsečky).

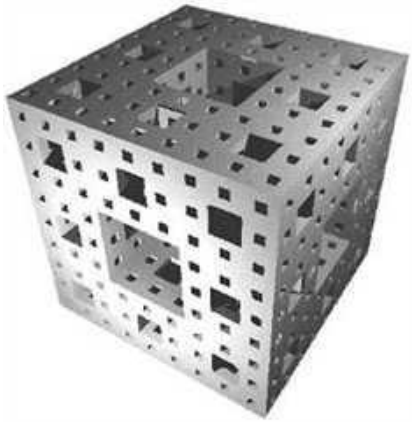
Tvrzení. Sestrojíme-li křivku C v prostoru dimenze n, pak můžeme vždy najít v trojrozměrném prostoru křivku C', která je s křivkou C homeomorfní.

Podobně jako je Sierpinského koberec jakousi univerzální křivkou v rovině, existuje i podobná křivka v trojrozměrném prostoru, ale vzhledem k předchozí větě je univerzální křivkou nejen pro prostor dimenze 3:

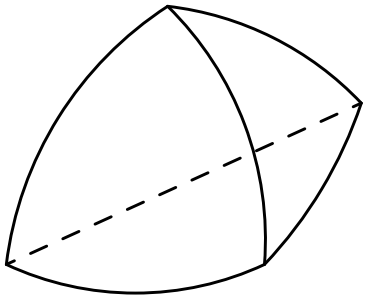
Tvrzení. V trojrozměrném prostoru existuje jistá univerzální křivka, která obsahuje nejen topologický obraz každé křivky trojrozměrného

prostoru, ale také topologický obraz každé křivky v libovolném n-rozměrném prostoru.

Konstrukce této univerzální křivky byla provedena rakouským matematikem K. Mengerem.[26] Křivka bývá nazývána ***Mengerova krychle*** nebo také ***Mengerova houba*** (viz obr. 6.7).



Obrázek 6.7: Mengerova krychle, resp. Mengerova houba zkonstruovaná pro první tři kroky.

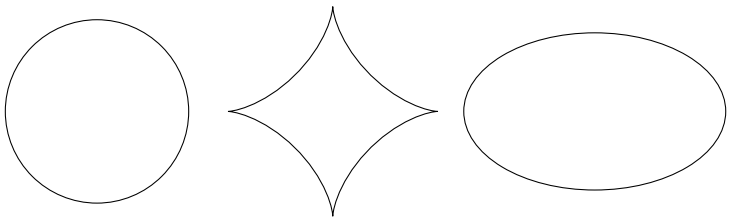


Obrázek 6.8: Příklad prostorové křivky, která není homeomorfní s žádnou křivkou v rovině.

Pokud lze všechny křivky sestrojené v prostoru libovolné dimenze topologicky zobrazit do Mengerovy krychle, přirozeně vzniká otázka, proč nemůžeme jít ještě o dimenzi níž, tj. proč nehraje tuto roli Sierpinského koberec, který je univerzální křivkou v rovině. Potíž je v tom, že v prostoru existují křivky, které nelze topologicky zobrazit na žádnou křivku v rovině, přesněji řečeno: které nejsou homeomorfní s žádnou křivkou v rovině (viz např. obr. 6.8).

Urysohn bezesporu dosáhl hlubokých a významných výsledků nejen v teorii křivek. My se však vrátíme k jeho definici. Přijmeme-li ji za onu hledanou optimální definici křivky, čeká nás jedno zklamání. Umíme sice vydělit odpovídající objekty, které intuitivně považujeme za křivky, a současně nezahrneme žádné jiné, máme definici matematicky precizní, ale neumíme od sebe vzájemně odlišit objekty na obrázku 6.9. Jinak řečeno Urysohnova definice neumožňuje zkoumat lokální vlastnosti křivek. Definicí křivky, která lokální vlastnosti zkoumat umožňuje, se budeme zabývat v odstavci 6.2.2.

[26] Karl Menger (1902–1985).



Obrázek 6.9: Topologicky ekvivalentní křivky – kružnice, asteroida a elipsa

Historické poznámky

Hlavní výsledky z teorie dimenze, jejichž součástí jsou i některé úvahy o definici křivky, obdržel Urysohn již na podzim 1921 a v zimě 1922. Na jaře připravil k vydání výtah, který vyšel v podobě dvou krátkých pojednání ještě téhož roku v *Comptes Rendus* Pařížské akademie věd:[27]

- *Les multiplicités Cantoriennes*, C. R. 175, 1922, str. 440–442.
- *Sur la ramification des lignes Cantoriennes*, C. R. 175, 1922, 481–483.

Po té připravoval Urysohn podrobný výklad těchto výsledků i s důkazy. První část byla dokončena 20. 3. 1923 a poslána do časopisu *Fundamenta Mathematicae*, kde vyšla až po Urysohnově smrti:

- *Fundamenta Mathematicae* 7, 1925, str. 30–139.
- *Fundamenta Mathematicae* 8, 1926, str. 225–359.

Rozpracovaná část druhá byla připravena do tisku Alexandrovem podle rukopisů. Alexandrov píše, že se při přípravě držel plánu Urysohna z léta 1922, do něhož začlenil některé pozdější výsledky.[28]

Druhá část poprvé vyšla pod názvem: *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes (Pojednání o cantorových varietách)*, část druhá *Les lignes Cantoriennes (Cantorovy křivky)*.[29]

Co se týče teorie křivek, rozpracovával myšlenky související s Urysohnovými pracemi zejména K. Menger, který nezávisle na Urysohnovi podal také definici dimenze – viz [Men28], [Men32].

[27] Podané H. Lebesguem (1875–1941) na zasedání Pařížské akademie věd 25.9.1922.
[28] Viz [Ury51, str. 517–518].
[29] Verhandeligen der Kon. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, 1 sekce, 13, 4 (1928), str. 1–172.

6.2.2. Křivka jako jednorozměrná podvarieta

Ukázali jsme, že poprvé s pojmem varieta přišel B. Riemann (viz sekce 5.4) ve snaze popsat geometrickou strukturu jako jakési množství bodů mající jisté „rozměry“. Postupně se tento pojem vyvinul až do dnešní podoby topologických a diferencovatelných variet:[30]

Definice. Topologickou n-rozměrnou varietou rozumíme separovaný topologický prostor M se spočetnou bází, který je lokálně homeomorfní s $\mathbb{R}^n$, tj. pro každé $x \in M$ existuje jeho okolí U, otevřená množina $V \subset \mathbb{R}^n$ a homeomorfismus $\varphi : U \to V$.

Přičemž topologický prostor se nazýváme separovaný, jestliže každé jeho dva různé body mají disjunktní okolí.

Uvažujme otevřenou množinu $U \subset \mathbb{R}^m$. Nechť $V \subset \mathbb{R}^k$ je další otevřená množina a $z = (y^1, \ldots, y^k) \in \mathbb{R}^k$. Zobrazení $f : U \to V$ je dáno k-ticí funkcí

$$y^1 = f^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, y^k = f^k(x^1, \ldots, x^n)\,,$$

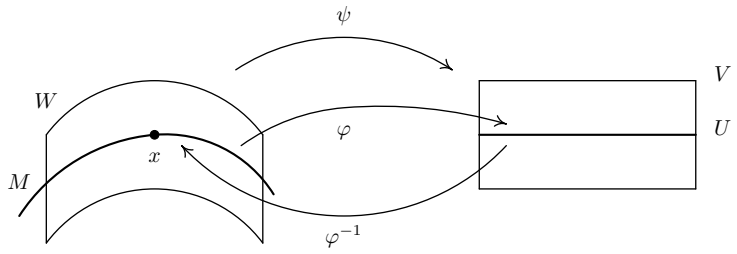
které nazýváme složky zobrazení f. Píšeme též

$$y^p = f^p(x^i)\,, \qquad i = 1, \ldots, n,\ p = 1, \ldots, k,$$

stručně také $y = f(x)$.

Říkáme, že f je diferencovatelné zobrazení třídy C^r jestliže všechny jeho složky jsou funkce třídy C^r, $r \in \mathbb{N}$. Hladké zobrazení znamená zobrazení třídy C^∞.

Difeomorfismem třídy C^s dvou n-rozměrných variet M_1, M_2 třídy C^r, $s \leq r$, rozumíme bijektivní zobrazení $f : M_1 \to M_2$ třídy C^s takové, že i inverzní zobrazení $f^{-1} : M_2 \to M_1$ je třídy C^s.



Obrázek 6.10: Definice podvariety

[30] Viz [Kol03].

Definice. Podmnožinu $M \subset \mathbb{R}^n$ nazveme m-rozměrnou podvarietou třídy C^r, $m \leq n$, jestliže pro každý bod $x \in M$ existuje jeho okolí W a difeomorfismus $\psi : W \to V \subset \mathbb{R}^n$ třídy C^r, který zobrazí $W \cap M$ na podmnožinu $U \subset V$ určenou rovnicemi $x^{m+1} = 0, \ldots, x^n = 0$.

Lokálně tedy m-rozměrná podvarieta M vypadá jako zakřivený m-rozměrný lineární podprostor v $\mathbb{R}^n$.[31]

V roce 1935 H. Whitney[32] dokázal, že každá n-rozměrná varieta třídy C^r je difeomorfní třídy C^r n-rozměrné podvarietě v prostoru $\mathbb{R}^{2n+1}$. V tomto smyslu „abstraktní" variety nejsou nic jiného než abstraktně nazírané podvariety v číselných prostorech.

Jednorozměrnou podvarietu variety M nazveme křivka na M:

Definice křivky (diferenciálně–geometrická). Podmnožinu $M \subset \mathbb{R}^n$ nazveme ***křivkou*** nebo-li 1-rozměrnou podvarietou třídy C^r, jestliže pro každý bod $x \in M$ existuje jeho okolí W a difeomorfismus $\psi : W \to V \subset \mathbb{R}^n$ třídy C^r, který zobrazí $W \cap M$ na podmnožinu $U \subset V$ určenou rovnicemi $x^2 = 0, \ldots, x^n = 0$ (viz obr. 6.10).

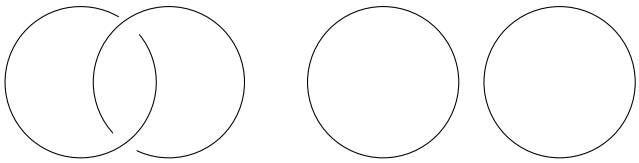
Tato definice pohlíží tedy na křivku *lokálně* jako na zakřivený 1-rozměrný lineární podprostor v $\mathbb{R}^n$ (tj. jednoduchý oblouk). Lokální systém souřadnic a diferencovatelná zobrazení nám dávají silný nástroj k vyšetřování vlastností křivky.

Z globálního hlediska se však mohou některé objekty v rámci uvedené definice odlišovat nesnadno. Např. dvě kružnice zaklesnuté do sebe a dvě kružnice vedle sebe (viz obr. 6.11) jsou z pohledu této definice křivky až na parametrizace tytéž objekty – po částech jednoduché oblouky s konstantní křivostí. Naopak z pohledu topologie je zde podstatný rozdíl. Z topologického hlediska považujeme dva objekty za „totožné" (topologicky ekvivalentní), pokud jsou homeomorfní, tj. pokud lze převést jeden na druhý spojitým zobrazením, aniž bychom je „roztrhli" nebo „slepili". Je evidentní, že kružnice zaklesnuté do sebe takovým způsobem převést na dvě kružnice vedle sebe nemůžeme, tj. tyto objekty nejsou topologicky ekvivalentní.

Na druhou stranu křivky na obrázku 6.9 jsou ve smyslu topologie totožné, ale z hlediska diferenciální geometrie je ihned rozlišíme – čtyři singulární body u asteroidy versus hladkost kružnice a elipsy, kružnice jako křivka s konstantní křivostí versus elipsa jako křivka s křivostí proměnlivou apod.

[31] Z globálního hlediska se však M může od $\mathbb{R}^m$ podstatně odlišovat, tj. topologicky řečeno, m-rozměrná podvarieta není obecně homeomorfní s $\mathbb{R}^m$.

[32] Hassler Whitney (1907–1989).



Obrázek 6.11:

Literatura

[Aul97] Aull, C. E.–Lowen, R., ed. *Handbook of the History of General Topology*, svazek 1. Kluwer Academic Publishers, London, 1997.

[Can85] Cantor, G. *Trudy po těorii množestv.* Nauka, Moskva, 1985. (pod redakcí A. N. Kolmogorova a A. P. Juškeviče).

[Kol03] Kolář, I. *Úvod do globální analýzy.* Masarykova univerzita, Brno, 2003.

[Luz48] Luzin, I. I. *Těorija funkcij dějstvitělnovo peremenovo.* Gosizdat, Moskva, 1948.

[Men28] Menger, K. *Dimensiontheorie.*, svazek 1. Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1928.

[Men32] Menger, K. *Mengentheoretische Geometrie in Einzeldarstellungen. Kurventheorie.*, svazek 2. Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1932. (reprint 1967, Bronx, Chelsea Publ.).

[Pul86] Pultr, A. *Podprostory euklidovských prostorů.* SNTL, Praha, 1986.

[Ury27] Urysohn, P. S. *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes (Les lignes Cantoriennes)*, svazek 2. Akademie, Amsterdam, 1927.

[Ury51] Urysohn, P. S. *Trudy po topologii i drugim oblasťam matěmatiki*, svazek 1. Těchnicko-teoreticeskaja literatura, Moskva, 1951. (s poznámkami a dodatky P. S. Alexandrova).

[Vop89] Vopěnka, P. *Rozpravy s geometrií.* Academia, Praha, 1989.

Závěr

> *Geometr má před sebou list papíru pokreslený čárami rozmanitých tvarů, rovnými i křivými, vzájemně propletenými a protínajícími se v různých bodech. Jeho zrak spočinul na obrázku, jeho pohled však pronikl skrze obrázek, ven z reálného světa do světa geometrického. Tak například za rovnou čárou uviděl úsečku, uviděl ji v její úplné čistotě a spolu s ní uviděl dokonalou přímost. Od okamžiku tohoto prohlédnutí je pro něj navždy úsečka úsečkou geometrickou a ne čárou narýsovanou podle pravítka.* P. Vopěnka, [Vop89, str. 16]

Prošli jsme 5000 let po stopách křivek. Viděli jsme, že impulzy k jejich zkoumání byly velmi rozmanité. Zájem o křivky zdaleka nebyl iniciován jen potřebami praxe, ale často byly používány, rozvíjeny či zkoumány křivky pro ně samotné – ať už z důvodů estetických nebo čistě z přirozené zvídavosti lidského ducha. Během studia pojmu křivka jsme došli k závěru, že otázka vytyčená v úvodu

Co je to křivka?

je ve své podstatě spíše filozofická než matematická.

Zůstaneme nejdříve u křivky jako matematického pojmu. Ukázali jsme, že nejstarší písemně dochovaná snaha zformulovat definici křivky se objevuje u Eukleida:

Eukleidova definice: *Čára je délka bez šířky.*

Během historického vývoje se tato definice měnila v souvislosti s objevením nových metod, které umožňovaly křivky zkoumat. Z těch naprosto

stěžejních to byla metoda souřadnic, která umožnila uchopit křivky algebraickým aparátem, později infinitezimální počet, pojem funkce a matematická analýza, v neposlední řadě topologie. Přehledně jsou tyto vývojové etapy shrnuty v tabulce 6.1. Postupem času se v souvislosti s každou novou metodou a s ní spojenou definicí křivky objevily další otázky, které (mimo jiné) iniciovaly nový přístup ke křivkám. Ve dvacátém století dospěl Urysohn k definici, která, jak jsme ukázali, zahrnuje všechny „rozumné“ rovinné i prostorové objekty, které bychom nazvali křivkou a nezahrnuje ty, které bychom v žádném případě křivkou nenazvali, např. plochu čtverce.

Urysohnova definice: *Křivkou rozumíme kontinuum dimenze 1.*

Pozoruhodné je, že když tuto definici srovnáme s definicí Eukleida, spatříme mezi nimi jistou analogii, přestože byly napsány v rozmezí více než 2200 let. Na definici Urysohna lze pohlížet jako na exaktní formulaci Eukleidova intuitivního vyjádření.

Eukleides i Urysohn vystihli podstatu pojmu křivka – podstatu toho, čím oddělit křivku od plošného obrazce. Mohli bychom být spokojeni s Urysohnovou formulací. Ukázali jsme však, že tato definice neumožňuje zkoumat obvyklé lokální vlastnosti křivek.

Lze říci, že různé obory matematiky rozumí pod pojmem křivka různý obsah. Něco jiného znamená pojem křivka v topologii, něco jiného v diferenciální geometrii apod. Pro pojem křivka pak zavádí každý obor svou vlastní definici. Tyto definice mají neprázdný průnik do něhož budou spadat běžné křivky, ale v zahrnutí některých objektů se budou odlišovat. Daleko podstatnější však je, že každá z těchto definic nám umožňuje dobře zkoumat jiné vlastnosti. Některé obory matematiky se vrací k definici Jordanově s tím, že přidávají další předpoklady. Tak dostáváme jiný přístup ke křivce, který v intuitivní podobě naznačil poprvé Riemann. Křivka je chápána jako jednorozměrná podvarieta, přičemž dalšími předpoklady se rozumí požadované vlastnosti variety – projektivní, algebraická, diferencovatelná apod.

Coolidge v úvodu [Coo40] dělí geometrii do čtyř oblastí:

(1) Syntetická - to je geometrie prakticky všech předchůdců Descarta, geometrie bez algebraické struktury, kde uvažujeme přímo obrazy a nikoli obrazy skrze rovnice. Je tu také geometrie pohybu a kolineace.
(2) Algebraická - zde studujeme vlastnosti geometrických obrazů skrze algebraické vztahy spojující jejich souřadnice nebo jejich rovnice. Grupa je lineární, později vzájemně jednoznačných algebraických transformací, biracionální grupa.
(3) Diferenciální - zde studujeme vlastnosti geometrických obrazů objevené pomocí diferenciálního počtu. Grupa jsou vzájemně jednoznačné

analytické transformace.[33]
(4) Topologie. Grupou zde jsou vzájemně jednoznačné spojité transformace (homomorfismy).

K těmto oborům přiřadíme dnes běžně používané definici křivky:

(1) Syntetická geometrie – křivka chápána jako obraz tenké čáry, tj. definice křivky v matematickém smyslu v syntetické geometrii není.

(2) Algebraická geometrie – křivka jako množina bodů $X[x_1, \ldots, x_n]$ splňujících jistý systém algebraických rovnic.

(3) Diferenciální geometrie – křivka jako jednorozměrná diferencovatelná varieta.

(4) Topologie – křivka jako kontinuum dimenze 1.

Striktně matematicky je tedy pojem křivka tímto způsobem vyřešen.

Zůstává rovina filozofická, kdy se ptáme

Co je to křivka?

a předpokládáme, že dostaneme odpověď zahrnující všechny objekty, které intuitivně pod pojmem křivka chápeme, a přitom nezahrnující žádné jiné. Avšak takovou odpověď nemáme. A patrně ji ani najít exatně nelze. Reálné objekty jako kružnice nakreslená kružítkem nebo graf funkce generovaný počítačem apod. jen znázorňují objekty, které považujeme za křivky, v mnoha případech dokonce znázorňují jen jejich části. Intuitivně pod pojmem křivka chápeme abstraktní ideu – něco, co reálné objekty jen modelují či symbolizují.

Při studiu vývoje pojmu křivka, pohybujíce se často na hranicích mezi matematikou, historií a filozofií, nás napadalo, zda jsme s intuitivně jednoduchým pojmem křivka nenarazili na strop světa exaktního myšlení. Ostatně podobně jako se to v posledních desetiletích stalo již s dalšími pojmy v jiných oblastech matematiky a fyziky. Dovedlo nás to k úvahám, že přirozenost světa kolem nás, jehož podstatu vnímáme někde uvnitř sebe, nelze zvážit, změřit, pojmenovat, nastudovat a pojmout myšlením. A což teprve svět našich abstraktních představ, kam pojem křivka u každého z nás patří jeho osobitým způsobem. Tyto úvahy jsou však již zcela subjektivního rázu a vzdáleny od objektivního jazyka matematiky. Přesto i v matematice je třeba pochopit, tedy jít až za myšlení, dojít na ten okraj, kde se myšlení mění v poznání. Tento proces pochopení podstaty pojmu je, dle našeho názoru, na vývoji pojmu křivka možno zajímavým způsobem sledovat.

[33] Analytické transformace ve smyslu hladkých zobrazení. (Pozn. autorky.)

Tabulka 6.1: Vývojové etapy definice křivky

Období	**Nová metoda**	**Nová definice křivky**	**Objevený „problém“**
3. století před Kr. (Eukleides)	Axiomatické budování geometrie	Čára jako délka bez šířky. (viz str. 41)	Pohyb
polovina 17. století (R. Descartes)	Analytická metoda souřadnic	Dráha průsečíku pohybujících se přímek, později křivek. (viz str. 113)	Nealgebraické křivky
Přelom 17.–18. st. (I. Newton)	Mocninné řady	$F(x, y)$ jako analytický výraz. (viz str. 167)	Neanalytické funkce
2. pol. 19. století (C. Jordan)	Zpřesňování základů matematické analýzy	Jordanova definice (viz str. 202)	Vlastnosti funkcí, mohutnost continua
Konec 19. století (G. Cantor)	Teorie množin	Cantorova definice (viz str. 209)	Nemožnost přenosu z roviny do prostoru
Začátek 20. století (P. S. Urysohn)	Topologie a teorie dimenze	Urysohnova defnice (viz str. 216)	Nemožnost zkoumat lokální vlastnosti
20. století	Analýza na varietách	Křivka jako jednorozměrná varieta (viz str. 222)	***Dnes užívaná v mnoha oborech***

Literatura

[Ada08] Adam–Tanery. *Oeuvres de Descartes*, svazek I–X. Léopold Cerf, Paris, 1897–1908.

[Apo90] Apollónius z Pergy. *Apollonius Conics Books V to VII (The Arabic Translation of the Lost Greek Original in the Version of the Banú Músa)*. Springer-Verlag, New York, 1990. (překlad do angličtiny a komentáře G. J. Toomer).

[Aul97] Aull, C. E.–Lowen, R., ed. *Handbook of the History of General Topology*, svazek 1. Kluwer Academic Publishers, London, 1997.

[Bar00] Barrow, J. D. *Pí na nebesích*. Mladá fronta, Praha, 2000. (z angl. originálu Pi in the Sky, Oxford University Press, 1992, přeložili Stehlíková N.-Vrba A.).

[Beč98] Bečvář, J. *René Descartes milovník rozumu*. Prometheus, Praha, 1998.

[Beč01] Bečvář, J. a kol. *Matematika ve středověké Evropě*, svazek 19 v *Dějiny matematiky*. Prometheus, Praha, 2001.

[Beč02] Bečvářová, M. *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady*, svazek 20 v *Dějiny matematiky*. Prometheus, Praha, 2002.

[Beč03] Bečvář, J.–Bečvářová, M.–Vymazalová, H. *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*, svazek 23 v *Dějiny matematiky*. Prometheus, Praha, 2003.

[Ber42] Bernoulli, J. *Opera Omnia*. Lausannae–Genevae, 1742.

[Ber04] Berling, P. *Dějiny astrologie*. Slovart, Bratislava, 2004.

[Bos81] Bos, H. J. M. On the representation of curves in descartes g'eométrie. *Archive for History of Exact Science*, 24, 295–338, 1981.

[Byd48] Bydžovský, B. *Úvod do algebraické geometrie*. Praha, 1948.

[Can01] Cantor, M. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, svazek III. Teubner, Leipzig, 1901.

[Can85] Cantor, G. *Trudy po těorii množestv*. Nauka, Moskva, 1985. (pod redakcí A. N. Kolmogorova a A. P. Juškeviče).

[Coo40] Coolidge, J. L. *A History of Geometrical Methods*. Oxford, 1940.

[Des37] Descartes, R. *The geometry of Rene Descartes*. Leiden, 1637. (z francouzštiny a latiny přeložil do angličtiny David Eugene Smith a Marcia L. Latham, Chicago 1925; přetisk: Dover Publications, New York, 1954).

[Des53] Descartes, R. *Razsuždënije o metode s priloženijami dioptrika, meteory, geometrija*. Izd. Akademii nauk SSSR, Leningrad, 1953. (předklad a komentáře Juškevič A. P.).

[Far50] Farrington, B. *Věda ve starém Řecku a její význam pro nás I. Od Thaleta k Aristotelovi*. Rovnost, Praha, 1950.

[Fia98] Fiala, J. Descartesova geometrie: od geometrické algebry k algebraické geometrii. V *Filosofické dílo René Descartesa*. Filosofia – ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ, Praha, 1998. (Soubor úvah z mezinárodní konference k 400. výročí narození René Descartesa).

[Fol82] Folta, J. *Česká geometrická škola - historická analýza*. Academia, Praha, 1982.

[Fol86] Folta, J. Od algebry a geometrie k analytické geometrii. V *Práce z dějin přírodních věd*, svazek 20. Praha, 1986. str. 85–95.

[Fuc87] Fuchs, E. a kol. *Světonázorové problémy matematiky IV*. SPN, Praha, 1987.

[Fuc93] Fuchs, E.–Bečvář, J., ed. *Historie matematiky I*, svazek 1 v *Dějiny matematiky*. JČMF, Praha, 1993.

[Fuc96a] Fuchs, E.–Bečvář, J., ed. *Matematika v 19. století*, svazek 3 v *Dějiny matematiky*. Prometheus, Praha, 1996.

[Fuc96b] Fuchs, E.–Bečvář, J., ed. *Člověk – umění – matematika*, svazek 4 v *Dějiny matematiky*. Prometheus, Praha, 1996.

[Fuc99] Fuchs, E.–Bečvář, J., ed. *Matematika v 16. a 17. století*, svazek 12 v *Dějiny matematiky*. Prometheus, Praha, 1999.

[Gal05] Galvin, J. Abydos. Život a smrt na úsvitu egyptské civilizace. *National Geographic*, 4, 36–51, 2005.

[Gel04] Geldard, R. G. *Esoterické Řecko*. Eminent, Praha, 2004. (přeložil Souček J.).

[Gra94] Grattan–Guinness, I., ed. *Companion Encyklopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. Routledge, London, 1994.

[Haw91] Hawking, S. W. *Stručná historie času*. Mladá fronta, Praha, 1991. (z angl. originálu A Brief History of Time, Bantam Books, New York, 1988, přeložil Karas, V.).

[Hei33] Heidel, W. A. *The Heroic Age of Science*. Washington, 1933.

[Hei98] Heilbron, J. L. *Geometry Civilized*. Clarendon Press, Oxford, 1998.

[Hra98] Hradečný, P.–Dostálová, R. *Dějiny Řecka*. Lidové noviny, 1998.

[Isi00] Isidor ze Sevilly. *Etymologie I–III*, svazek III v *Knihovna středověké tradice*. OIKOYMENH, Praha, 2000. (překlad a poznámky Korte, D.).

[Juš70] Juškevič, A. P. *Istorija matěmatiki – matěmatika VII stoletija*, svazek II. Nauka SSSR, Moskva, 1970.

[Juš72] Juškevič, A. P. *Istorija matěmatiki – matěmatika VIII stoletija*, svazek III. Nauka SSSR, Moskva, 1972.

[Juš76a] Juškevič, A. P., ed. *Chrestomatija po istorii matěmatiki*. Prosvěščenie, Moskva, 1976.

[Juš76b] Juškevič, A. P. The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Science*, 16, 37–85, 1976.

[Juš77] Juškevič, A. P. *Dějiny matematiky ve středověku*, svazek I. Academia, Moskva, 1977.

[Kat98] Katz, V. J. *A history of mathematics: an introduction*. Addison-Wesley Educational Publishers, Inc., 2. vydání, 1998.

[Kem76] Kempe, A. B. On a general method of describing plane curves of the n^{th} degree by linkwork. *Proc. London Math. Soc.*, 7, 213–216, 1876.

[Kli14] Kliem, F. *Archimedes' Werke*. Berlin, 1914.

[Kač03] Kočandrlová, M. O kružnici. *Učitel matematiky*, 1, 10–16, 2003.

[Kol68] Kolman, A. *Dějiny matematiky ve starověku*. Academia, Praha, 1968.

[Kol03] Kolář, I. *Úvod do globální analýzy*. Masarykova univerzita, Brno, 2003.

[Lar31] Lardner, D. *A Treatise on Algebraic Geometry*, svazek II. Whittaker, Treacher, and Arnot, London, 1831.

[Lor10] Loria, G. *Spezielle algebraische and transzendente ebene Kurven*, svazek I. (Die algebraischen Kurven). Druck und Verlag von B. G. Teubner, 2. vydání, 1910.

[Lor11] Loria, G. *Spezielle algebraische and transzendente ebene Kurven*, svazek II. (Die transcendenten und die Abgeleiteten Kurven). Druck und Verlag von B. G. Teubner, 2. vydání, 1911.

[Luz48] Luzin, I. I. *Těorija funkcij dějstvitělnovo peremenovo*. Gosizdat, Moskva, 1948.

[Mar98] Martellová, H. M. *Svět ve starověku*. Košice, 1998. (z angl. originálu The Ancient World, Kingfischer, 1995, přeložila Darmovzalová, K.).

[Men28] Menger, K. *Dimensiontheorie.*, svazek 1. Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1928.

[Men32] Menger, K. *Mengentheoretische Geometrie in Einzeldarstellungen. Kurventheorie.*, svazek 2. Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1932. (reprint 1967, Bronx, Chelsea Publ.).

[Neu49] Neugebauer, O. The astronomical origin of the theory of conic section. *Isis*, 40, 124, 1949.

[New60] Newton, I. *An Enumeration of Lines of The Third Order*. London, 1860.

[New99] Newton, I. *The Principia. Mathematical Principles of Natural Philosophy*. University of California Press, London, 1999. (překlad I. Bernard Cohen a Anne Whitman).

[Oli93] Oliphantová, M. *Po stopách významných civilizací starověku*. Gemini, Bratislava, 1993. (z angl. originálu The Atlas of Ancient World, Marshall edition, London, 1992).

[Pla93] Platon. *Ústava*, svazek 65 v *Antická knihovna*. Svoboda – Libertas, Praha, 1993. (přeložil Radislav Hošek, 1990).

[Pol03] Polanecká, J. *Geometrie české gotické architektury*. Diplomová práce PřF MU, Brno, 2003.

[Pul86] Pultr, A. *Podprostory euklidovských prostorů*. SNTL, Praha, 1986.

[Rie19] Riemann, B. *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1919.

[Sal25] Salmon, G. *A treatise on the higher plane curves*. Hodges a Smith, Dublin, 1825.

[Sar93] Sarton, G. *Ancient Science Through The Golden Age Of Greece*. Dover Publications, Inc., New York, 1993. 1. vydání 1952, The Harvard University Press, Cambridge.

[Sch00] Schwabik, Š. Bernard Bolzano a základy matematické analýzy. V *IX. seminář o filozofických otázkách matematiky a fyziky*, str. 63–85. Prometheus, Velké Meziříčí, 2000.

[Sch05] Schreiber, P. Some news on dürer's contributions to geometry. V *European Mathematics in the Last Centuries*, str. 141–148. Institute of Mathematics Wroclaw University, Wroclaw, 2005.

[Scr00] Scriba, C. J.–Schreiber, P. *5000 Jahre Geometrie: Geschichte Kulturen Menschen*. Springer, Berlin, 2000.

[Ser07] Servít, F. *Eukleidovy Základy (Elementa)*. Nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1907.

[Šmí69] Šmídová, J. *Pojetí diferenciální geometrie u Monge a Gausse*. Diplomová práce MFF UK, Praha, 1969.

[Ště64] Štěpánková–Budilová, J. *Význam Descartesovy geometrie pro analytickou geometrii*. Diplomová práce MFF UK, Praha, 1964.

[Str63] Struik, D. J. *Dějiny matematiky*. Praha, 1963. (z angl. originálu A Concise History of Mathematics, G. Bell and Sons Ltd., London, 1956, přeložili Nový, L.-Folta, J.).

[Stu77] Studnička, F. J. *Karel Bedřich Gauss*. JČMF, Praha, 1877.

[Stu97] Studnička, J. O zásluhách descartesových v oboru věd exaktních. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, 26, 73–94, 1897.

[Svo73] Svoboda, L., ed. *Encyklopedie antiky*. Academia, Praha, 1973.

[Tho80a] Thomas, I. *Greek Mathematics (From Thales To Euclid)*, svazek 1. Harvard University Press, London, 1939 (reprinted 1951, 1957, 1968, 1980).

[Tho80b] Thomas, I. *Greek Mathematics (From Aristarchus to Pappus)*, svazek 2. Harvard University Press, London, 1941 (reprinted 1951, 1957, 1968, 1980).

[Ull87] Ullmann, E. *Svět gotické katedrály*. Praha, 1987.

[Ury27] Urysohn, P. S. *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes (Les lignes Cantoriennes)*, svazek 2. Akademie, Amsterdam, 1927.

[Ury51] Urysohn, P. S. *Trudy po topologii i drugim oblasťam matěmatiki*, svazek 1. Těchnicko-teoreticeskaja literatura, Moskva, 1951. (s poznámkami a dodatky P. S. Alexandrova).

[Vit79] Vitruvius. *Deset knih o architektuře*. Svoboda, Praha, 1979.

[Vop89] Vopěnka, P. *Rozpravy s geometrií*. Academia, Praha, 1989.

Rejstřík pojmů

asteroida, 215
asymptota, 143, 145–148, 156, 180

bod
    definice, 36
    dvojný, 146, 151, 177
    inflexní, 152
    izolovaný, 143
    násobný, 154, 173
    rozvětvovací, 213
    singulární, 143, 152, 153
    trojný, 151, 152
    uzlový, 143, 183
    vratu, 127, 143, 152, 183
brachistochrona, 129

catenary, 142
cykloida, 93, 129

definice křivky, 195, 210
    Cantorova, 203–205, 207, 208
    Descartova, 107
    diferenciálně–geometrická, 217
    Eukleidova, 36
    Janiszewského, 207
    Jordanova, 196–198, 201, 204, 205, 207
    Urysohnova, 210, 212, 214
    Zorettiho, 207
definice variety, 216
Descartův list, 129, 130
Dupinova indikatrix, 180

Egypt, 14
elipsa, 74, 93, 171, 215
    Cassiniho, 135
epicykloida, 128
Erlangenský program, 196
evoluta, 47, 177

Hippokratovy měsíčky, 60
hyperbola, 71, 74, 95, 110, 111, 143, 171

invariant, 178

kisoida, 47, 60, 136, 140
    Dioklova, 47, 48, 60, 129, 137, 141
kochloida, 48
konchoida, 50, 60, 106, 114, 115
    Nikomedova, 48, 50, 60, 93, 111, 129, 137
křivka
    n-tého stupně, 142, 156
    čtvrtého stupně, 133, 142, 152, 154, 157, 173, 182
    šestého stupně, 152
    algebraická, 107, 117, 136, 141–143, 153, 154, 160, 161
    geodetická, 177
    geometrická, 106, 107, 117, 141, 160
    kubická, 136, 142, 145, 146, 149, 151, 156
    mechanická, 106, 107, 117
    na ploše, 177
    paradoxní, 58
    prostorová, 177, 179
    s dvojí křivostí, 157, 159
    transcendentní, 107, 117, 142, 161
    univerzální, 213, 214
křivost
    Gaussova, 178
    křivky, 158, 159, 173, 176, 178, 179
    normálového řezu, 175, 178, 179
    plochy, 177, 178
    sféry, 175, 177
    střed, 177
kruh, 14, 15, 37
kružnice, 14, 15, 37, 60, 106, 215
    Apollóniova, 128

oskulační, 158, 173
Thaletova, 60
kuželosečky, 41, 45, 61, 71, 74, 95, 114, 136, 143, 150, 151, 156
střed, 153
kvadratrix, 60, 61, 106, 142
Hippiova, 37, 39, 59–61

lemniskata
Bernoulliho, 134

malba, 14
Mengerova houba, 214
Mengerova krychle, 214
menhiry, 14
Mezopotámie, 15

ovál, 17, 19, 93, 146
Cassiniho, 130, 132–135

parabola, 72, 74, 95, 130, 143, 171
Descartova, 104, 114, 145
divergentní, 148
kubická, 61, 114, 130, 141, 149
Neilova, 141
semikubická, 132, 141, 158
polára, 155, 177
přímka, 60, 106
definice, 36
imaginární, 154
nekonečně vzdálená, 95
polární, 176
projektivní svazek, 150
pyramidy, 14

rektifikace
křivky, 35, 132, 158
kružnice, 35, 41, 52, 60, 158
semikubické paraboly, 158
řetězovka, 142
rod křivky, 114, 142
řád
geometrické čáry, 142

Sierpinského koberec, 204, 209, 211–214
spirála, 51, 60, 106, 115
    Archimedova, 51, 58–60
    kónická, 58
    logaritmická, 93
    zlatá, 54
šroubovice, 58
střed křivosti, 47
stupeň
    algebraické křivky, 142

topologie, 191, 196, 203, 204, 217
torze, 178
transverzála, 155
trident, 114, 141, 148
trisekce úhlu, 35, 39, 50, 73
trojzubec, 148

úloha
    Apollóniova, 60, 87
    Archimedova, 71
    Keplerova, 128
    Pappova, 136

varieta, 186, 191, 196, 216, 217
    definice, 216
věta
    „znamenitá“ (theorema egregium), 178
    Eukleidova, 60
    Maclaurinova, 155
    Newtonova, 156
    Pascalova, 95, 181
    Pythagorova, 16, 60
    Thaletova, 60
vzorce
    Frenet–Serretovy, 178
    Plückerovy, 183

zlatý řez, 27

Jmenný rejstřík

Adelhard z Bathu (1075–1160), 93
d'Aigullion, Francois (1566–1617), 104
Apollónios z Pergy (260–180 př. Kr.), 37, 53, 55, 66, 68, 69, 71, 79–81, 93, 98, 107, 112, 145, 196
Archimedes ze Syrakus (287–212 př. Kr.), 38, 53, 55, 59, 62, 70, 79–81, 93
Archytas z Tarentu (428–365 př. Kr.), 62, 65, 66
Aristaeus (Aristaios) z Elder (370–300 př. Kr.), 53
Aristoteles (384–322 př. Kr.), 36, 41

Banú Músá, Ahmad (805–873), 83
Banú Músá, al-Hasan (810–873), 83
Banú Músá, Jafar Muhammad (800–873), 83
Barbaro, Daniele (1513–1570), 100, 103
Barrow, Isaac (1630–1677), 81
Beaune, Florismond de [Debeaune] (1601–1652), 121, 134
Bernoulli, Jacob [Jacques] (1654–1705), 127, 138, 140, 144, 159, 171, 180, 190
Bernoulli, Johann (1667–1748), 105, 127, 137, 139, 140, 144, 150, 151, 180, 181, 190
Bernoulli, Nicholas (1687–1759), 153
Betti, Enrico (1823–1892), 204
Bézout, Étienne (1730–1783), 166
Bianchi, Luigi (1856–1928), 193
Boëthius, Anicius Manlius Severinus Torquatus (cca 480–524), 87
Bolzano, Bernard Placidus Johann Nepomuk (1781–1848), 179, 183, 201, 202
Borchardt, Ludwig (1863–1938), 25
Bouvellese, Charlese de (1471–1553), 140
Brahe, Tycho de (1546–1601), 109
Braikenridge, William (1700 – 1769), 168

Brianchon, Charles Julien (1783–1864), 192
Brioschi, Francesco (1824–1897), 197
Brisson, Barnabé (1777–1828), 192
Brocard, Pierre René Jean Baptiste Henri (1845–1922), 177
Brunelleschi, Fillipo (1377–1446), 101

Campano z Novary, Giovanni (1220–1296), 93
Cantor, Ferdinand Ludwig Philipp (1845–1918), 212–214, 217, 218, 221, 222, 226
Cardano, Girolamo (1501–1576), 108
Carnot, Lazare Nicolas Marguérite (1753–1823), 193
Cartan, Elie (1869–1951), 203
Cassini, Giovanni Domenico (1625–1712), 142, 144, 165
Cassini, Jacob (1677–1756), 141, 142
Castelnuovo, Guido (1865–1952), 197
Cauchy, Augustin Louis (1789–1857), 191
Cayley, Arthur (1821–1895), 194, 202
al-Chajjám [Khayyam], Omar (1048–1131), 81, 82
Chasles, Michel (1793–1880), 105, 194
Clebsch, Rudolf Friedrich Alfred (1833–1872), 197
Clairaut, Alexis Claude (1713–1765), 157, 169, 171, 174, 187, 191
Codazzi, Delfino (1824–1873), 192
Conon ze Samu (280–220 př. Kr.), 53
Cotes, Roger (1682–1716), 166
Cramer, Gabriel (1704–1752), 188
Cremona, Antonio Luigi Gaudenzio Giuseppe (1830–1903), 197, 203

Dandelin, Germinal Pierre (1794–1847), 192
Darboux, Jean Gaston (1842–1917), 182, 193
Dedekind, Julius Wihelm Richard (1831–1916), 212–214
Deinostratos (390–320 př. Kr.), 37, 45, 48
Desargues, Girard (1591–1661), 104–106, 156, 193
Descartes, René (1596–1650), 42, 58, 70, 81–83, 105–127, 130–134, 138–140, 145, 146, 150, 157, 158, 170–174, 180, 187
Diokles (cca 240–180 př. Kr.), 55, 56, 62, 69, 150
Dupin, Pierre Charles François (1784–1873), 188, 191, 192
Dürer, Albrecht (1471–1528), 100, 101, 103

Egorov, Dimitri Fedorovič (1869–1931), 193
Enriques, Federigo (1871–1946), 197
Eudoxos z Knidu (480–355 př. Kr.), 37, 66

Eukleides z Alexandrie (325–265 př. Kr.), 24, 26, 37, 42, 44, 45, 53, 66, 68–70, 79, 80, 82, 87, 92, 112, 145, 146, 233, 234
Euler, Leonhard (1707–1783), 133, 144, 154, 165, 166, 171, 174, 181, 183–188, 190, 192, 195, 203
Eutokius z Askalonu (5. stol. př. Kr.), 49, 55, 56, 62, 68

Fagnano, Giovanni Francesco (1715–1797), 144, 150
Fermat, Pierre de (1601–1665), 81, 94, 105, 107, 109, 134, 135, 137, 139, 140, 145, 172
Ferroni, Pietro (1744–1825), 144
Fourier, Jean Baptiste Joseph (1768–1830), 182
Frenet, Fréderic Jean Frenet (1816–1868), 191

Galileo, Galilei (1564–1642), 109, 140
Gauss, Carl Friedrich (1777–1855), 144, 178, 189–192, 198, 203
Geminos z Rhodu (1. stol. př. Kr.), 66
Gerbert z Aurillacu [Gerbertus Remensis] (cca 950–1003), 88
Gherardo z Cremony (1114–1187), 83, 93, 94
Grassmann, Hermann Günter (1809–1877), 198, 202

Hachette, Jean (1769–1834), 192
al-Hadždžádž [Hajjáj] ibn Júsuf ibn Matár (cca 786–833), 80, 93
Hermann, Jacob (1678–1733), 138, 168
Hesse, Lugwig Otto (1811–1874), 196
Hilbert, David (1862–1943), 215, 216
Hipparchos (190–120 po Kr.), 38, 108
Huygens, Christiaan (1629–1695), 81, 127, 139, 151

Isidor ze Sevilly (cca 560–636), 87

Jacobi, Carl Gustav Jacobi (1804–1851), 202
Janiszewski, Zygmunt (1888–1920), 221, 222

Kepler, Johannes (1571–1630), 109, 138, 145
Klein, Felix (1849–1925), 199, 200, 210
Kusánský, Mikoláš [Cusa Nicholas] (1401–1464), 140

Lagrange, Joseph-Louis (1736–1813), 182
La Hire, Philippe de (1640–1718), 105
Lebesgue, Henri Léon (1875–1941), 229
Leibniz, Gottfried Wilhelm von (1646–1716), 106, 108, 117, 127, 140, 151, 170–172, 180
Lencker, Hans (1530–1585), 102, 103

Leotaud, Vincent (1595–1672), 151
l'Hospital, Guillaume François Antoine Marquis de (1661–1704), 105, 137, 138, 140, 172, 187
Lindemann, Carl Louis Ferdinand von (1852–1939), 170
Liouville, Joseph (1809–1882), 189

Maclaurin, Colin (1698–1746), 145, 165, 166, 168
Mainardi, Gaspare (1800–1879), 192
Malves, Jean Paul de Gua de (1712–1785), 152, 164, 165
Maupertuis, Pierre Louis Moreau (1698–1759), 164, 165
Menaichmos (380–320 př. Kr.), 37, 45, 49, 52, 53
Menelaos z Alexandrie (70–130 po Kr.), 66
Menger, Karl (1902–1985), 228
Mersenne, Marin (1588–1648), 106, 109, 139, 172
Meusnier, Jean Battiste (1754–1793), 188, 191
Möbius, Augustus Ferdinand (1790–1868), 194
Monge, Gaspard (1746–1818), 178, 188, 189, 191, 192, 202, 203

Neil, William (1637–1670), 142, 150
Newton, Isaac (1643–1727), 120, 122, 127, 133, 139, 140, 145–148, 150–154, 156–158, 160, 161, 164, 166, 168, 169, 171–173, 181, 185, 187
Nicole, François (1983–1758), 157
Nikomedes (2. stol. př. Kr.), 56, 58, 119, 139
Noeter, Emmy Amalie (1882–1935), 197
Noeter, Max (1844–1921), 197

Olivier, Théodore (1793–1853), 192
Oresme, Nicole (1323–1382)., 92

Pappos z Alexandrie (cca 290–350 po Kr.), 40, 42, 53, 58, 66, 67, 80, 93, 108, 112–117, 119–121, 123, 124, 146
Pascal, Blaise (1623–1662), 104–106, 127, 156, 157, 172, 193
Pascal, Etienne (1588–1651), 172
Peterson, Karl Michajlovič (1828–1881), 192
Pisánský, Leonardo [Leonardo Pisano Fibonacci] (1170–1250), 92
Pitot, Henri (1695–1771), 171
Plücker, Julius (1801–1868), 185, 194, 195, 198, 203
Poncelet, Jean Victor (1788–1867), 192
Proklos (cca 410–485 po Kr.), 40, 58, 67, 68
Ptolemaios, Klaudios (85–168 po Kr.), 38, 39, 79, 80, 104

Quetelet, Lambert Adolphe Jacques (1796–1874), 192
Qurra, Thábit ibn (830–901), 80, 84

Riemann, Georg Friedrich Bernhard (1826–1866), 179, 198–200, 203, 204, 207, 217, 218, 230
Roberval, Gilles Personne de (1602–1675), 139, 172

Saladini, Girolamo (1731–1813), 144
Salmon, George (1819–1904), 196
Schooten, Francis van (1615–1660), 134, 145, 157
Segre, Corrado (1863–1924), 197
Serret, Josef Alfred (1819–1885), 191
Severi, Francesco (1879–1961), 197
Sierpinski, Waclaw (1882–1969), 218, 224, 225, 227
Sínán, Ibrahím ibn (980–946), 84
Sluze, René François Walter de (1622–1685), 139
Sporus (3. stol. po Kr.), 49, 70
Steiner, Jacob (1796–1863), 157, 194
Stirling, James (1692–1770), 148, 153, 168, 169, 173

Tartaglia, Niccolo Fontana (1499–1557), 108
Torricelli, Evangelista (1608–1647), 140

Urysohn, Pavel Samujlovič (1898–1924), 210, 220–222, 224–229

Veronese, Giuseppe (1854–1917), 197
Viète, François (1540–1603), 108, 111, 145
Vitruvius, Pollio Marcus (cca 90–20 př. Kr.), 38, 61, 62
Viviani, Vincenzo (1622–1703), 66

Waerden, Bartel Leendert van der (1903–1996), 197
Wallis, John (1616–1703), 142, 145, 158, 170
Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm (1815–1897), 181, 182
Whitney, Hassler (1907–1989), 231
Witt, Jan de (1623–1672), 134–137

Zoretti, Ludovic (1880–1948), 221

Přehled vydaných svazků edice DĚJINY MATEMATIKY

1. J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Historie matematiky I*, 1994
2. J. Bečvář a kol.: *Eduard Weyr (1852–1903)*, 1995
3. J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Matematika v 19. století*, 1996
4. J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Člověk, umění, matematika*, 1996
5. J. Bečvář (ed.): *Jan Vilém Pexider (1874–1914)*, 1997
6. P. Šarmanová, Š. Schwabik: *Malý průvodce historií integrálu*, 1996
7. J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Historie matematiky II*, 1997
8. P. Šišma: *Teorie grafů (1736–1963)*, 1997
9. K. Mačák: *Počátky počtu pravděpodobnosti*, 1997
10. M. Němcová: *František Josef Studnička (1836–1903)*, 1998
11. J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Matematika v proměnách věků I*, 1998
12. J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Matematika v 16. a 17. století*, 1999
13. M. Bečvářová: *Z historie Jednoty (1862–1869)*, 1999
14. K. Lepka: *Historie Fermatových kvocientů (Fermat – Lerch)*, 2000
15. K. Mačák: *Tři středověké sbírky matematických úloh*, 2001
16. J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Matematika v proměnách věků II*, 2001
17. E. Fuchs (ed.): *Mathematics throughout The Ages*, 2001
18. K. Mačák, G. Schuppener: *Matematika v jezuitském Klementinu v letech 1600–1740*, 2001
19. J. Bečvář a kol.: *Matematika ve středověké Evropě*, 2001
20. M. Bečvářová: *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady*, 2001
21. P. Šišma: *Matematika na německé technice v Brně*, 2002
22. M. Hykšová: *Karel Rychlík (1885–1968)*, 2003
23. J. Bečvář, M. Bečvářová, H. Vymazalová: *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*, 2003
24. J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Matematika v proměnách věků III*, 2003
25. E. Fuchs (ed.): *Mathematics throughout The Ages II*, 2004
26. K. Mačák: *Vývoj teorie pravděpodobnosti v českých zemích do roku 1938*, 2005
27. Z. Kohoutová, J. Bečvář: *Vladimír Kořínek (1899–1981)*, 2005
28. J. Bečvář, M. Bečvářová, J. Škoda: *Emil Weyr a jeho pobyt v Itálii v roce 1870/71*, 2006
29. A. Slavík: *Product Integration, Its History And Applications*, 2007